funções de va's contínuas

- distribuição de uma transformação
- densidade de uma transformação

Prof. Dr. Jhames Sampaio
Universidade de Brasília

funções compostas

Conhecemos a distribuição de uma variável aleatória X

Queremos encontrar a distribuição da variável aleatória g(X)

$$X \xrightarrow{\text{composta com } g(t)} g(X)$$

Quais condições deve respeitar a função g(t)?

exemplo

$$\boxed{\frac{y^{1/n}-0}{1-0}}$$

Seja X ~ U(0,1). Encontre a função densidade da variável aleatória Y = X^n

Para $0 \leq y \leq 1,$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P\left(X^n \leq y\right) \\ &= P\left(X \leq y^{1/n}\right) \\ &= y^{1/n} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{1/n-1}, & \text{se} \quad y \in [0,1], \\ 0, & \text{se} \quad y \notin [0,1]. \end{cases}$$

exemplo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

Seja X ~ N(0,1). Encontre a função densidade da variável aleatória $Y = X^2$

$$F_Y(y)$$

$$= P(Y \leq y)$$

$$= P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right)$$

$$= F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right) + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-|y|/2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2y\pi}}e^{-|y|/2}$$

regra geral

Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade f_X. Suponha que g(t) é uma função real, monótona, estrita e derivável; então a variável aleatória Y = g(X) tem função densidade dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|, & \text{se} \quad y = g(x) \text{ para algum } x, \\ 0, & \text{se} \quad y \neq g(x) \text{ para algum } x. \end{cases}$$