Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

5ª Lista de PE – Solução

1. Sejam X_A e X_B o números de jogos que o time ganha contra times da classe A e da classe B respectivamente. Claramente X_A e X_B são variáveis aleatórias binomiais de parâmetros

$$\mathcal{E}\left(X_A\right) = 26(0,4) = 10,4 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X_A) = 26(0,4)(0,6) = 6,24$$
$$\mathcal{E}\left(X_B\right) = 18(0,7) = 12,6 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X_B) = 18(0,7)(0,3) = 3,78.$$

   a) Como estamos interessados na probabilidade de que $X_A + X_B$ seja maior ou igual a 25, observe que esta soma tem distribuição aproximadamente normal de média 23 e variância 10,02. Se $Y \sim N(23; 10,02)$, aplicando o Teorema de DeMoivre-Laplace podemos aproximar a probabilidade desejada como abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X_A + X_B \geqslant 25) &\simeq \mathcal{P}(Y \geqslant 25) \\ &= \mathcal{P}\left(\frac{Y-23}{\sqrt{10,02}} \geqslant \frac{25-23}{\sqrt{10,02}}\right) \\ &\simeq \mathcal{P}(Z \geqslant 0,6318) \\ &= 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 0,6318) \\ &\simeq 0,26435 \end{aligned}$$

   b) Agora, queremos calcular a probabilidade de que $X_A - X_B$ seja maior ou igual a 1. Observe então que esta subtração tem distribuição aproximadamente normal de média -2,2 e variância 10,02. Se $Y \sim N(-2,2; 10,02)$, aplicamos novamente o Teorema de DeMoivre-Laplace e aproximamos a probabilidade por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X_A - X_B \geqslant 1) &\simeq \mathcal{P}(Y \geqslant 1) \\ &= \mathcal{P}\left(\frac{Y+2,2}{\sqrt{10,02}} \geqslant \frac{1+2,2}{\sqrt{10,02}}\right) \\ &\simeq \mathcal{P}(Z \geqslant 1,0109) \\ &= 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 1,0109) \\ &\simeq 0,15625 \end{aligned}$$

2. Considere a sequência X_i de n v.a.'s independentes onde

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer sucesso,} \\ 0, & \text{se ocorrer fracasso,} \end{cases}$$

com $\mathcal{P}(X_i = 1) = p$.

Claramente $X_i \sim \text{Ber}(p)$ e se fizermos $X = X_1 + \cdots + X_n$, X representa o número de sucessos em n lançamentos (que já sabemos que representa uma binomial). Como

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X_1) + \cdots + \mathcal{E}(X_n) = np$$

e

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \cdots + \text{Var}(X_n) = np(1-p)$$

concluímos que $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

3. A tabela abaixo apresenta as probabilidades $\mathcal{P}(X = i, Y = j)$ com as respectivas marginais:

X / Y	0	1	2	3	$\mathcal{P}(X = i)$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
$\mathcal{P}(Y = j)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	1

4. a) $\Omega = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, K), (2, K), (3, K), (4, K), (5, K), (6, K)\}$.

   b) A tabela de distribuição segue abaixo:

X / Y	1	2	3	4	5	6	$\mathcal{P}(X = i)$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{P}(Y = j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

   c) Para todo $i = 0, 1$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ temos que

$$\mathcal{P}(X = i, Y = j) = \mathcal{P}(X = i)\mathcal{P}(Y = j),$$

   portanto X e Y são independentes.

   d)

$$\mathcal{P}(X \geqslant 0, Y \leqslant 4) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=1}^{4} \mathcal{P}(X = i, Y = j) = \frac{8}{12}.$$

5. a) As distribuições marginais seguem na tabela abaixo:

Y / X	1	2	3	$\mathcal{P}(Y = y)$
0	0,1	0,1	0,1	0,3
1	0,2	0,0	0,3	0,5
2	0,0	0,1	0,1	0,2
$\mathcal{P}(X = x)$	0,3	0,2	0,5	1

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X) &= 1(0,3)+2(0,2)+3(0,5)=2,2\\ \mathcal{E}(Y) &= 0(0,3)+1(0,5)+2(0,2)=0,9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X^2) &= 1^2(0,3)+2^2(0,2)+3^2(0,5)=5,6\\ \mathcal{E}(Y^2) &= 0^2(0,3)+1^2(0,2)+2^2(0,5)=1,3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathcal{E}(X^2)-[\mathcal{E}(X)]^2=0,76\\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathcal{E}(Y^2)-[\mathcal{E}(Y)]^2=0,49\end{aligned}$$

c) Não são independentes. Basta observar que

$$0,0=\mathcal{P}(X=2,Y=1)\neq\mathcal{P}(X=2)\mathcal{P}(Y=1)=(0,2)(0,5)=0,1.$$

d)

$$\mathcal{P}(X=1|Y=0)=\frac{\mathcal{P}(X=1,Y=0)}{\mathcal{P}(Y=0)}=\frac{0,1}{0,3}=\frac{1}{3}.$$

$$\mathcal{P}(Y=2|X=3)=\frac{\mathcal{P}(Y=2,X=3)}{\mathcal{P}(X=3)}=\frac{0,1}{0,5}=\frac{1}{5}.$$

e)

$$\mathcal{P}(X\leqslant 2)=\mathcal{P}(X=1)+\mathcal{P}(X=2)=0,5.$$

$$\mathcal{P}(X=2,Y\leqslant 1)=\mathcal{P}(X=2,Y=0)+\mathcal{P}(X=2,Y=1)=0,1.$$

6. a) As distribuições marginais seguem na tabela abaixo:

Y / X	-1	0	1	$\mathcal{P}(Y=y)$
-1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X) &= -1\left(\frac{1}{2}\right)+0+1\left(\frac{1}{2}\right)=0\\ \mathcal{E}(Y) &= -1\left(\frac{1}{6}\right)+0+1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X^2) &= 1\left(\frac{1}{2}\right)+0+1\left(\frac{1}{2}\right)=1\\ \mathcal{E}(Y^2) &= 1\left(\frac{1}{6}\right)+0+1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathcal{E}(X^2) - [\mathcal{E}(X)]^2 = 1\\ \text{Var}(Y) &= \mathcal{E}(Y^2) - [\mathcal{E}(Y)]^2 = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

c) De maneira análoga ao **item d)** da **Questão 5** encontramos

$$\mathcal{P}(X=-1|Y=0) = \frac{1}{2},\quad \mathcal{P}(X=0|Y=0)=0,\quad \mathcal{P}(X=1|Y=0)=\frac{1}{2},$$

$$\mathcal{P}(Y=-1|X=1) = \frac{1}{6},\quad \mathcal{P}(Y=0|X=1)=\frac{1}{3},\quad \mathcal{P}(Y=1|X=1)=\frac{1}{2}.$$

d) Como X e Y são independentes $\text{Cov}(X,Y)=0$ e

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}.$$

7. a) Lembre-se que podemos escrever $\rho(X,Y) = \mathcal{E}\left[\left(\frac{X-\mathcal{E}(X)}{\sigma(X)}\right)\left(\frac{Y-\mathcal{E}(Y)}{\sigma(Y)}\right)\right]$.
Como

$$\left(\frac{X-\mathcal{E}(X)}{\sigma(X)} - \frac{Y-\mathcal{E}(Y)}{\sigma(Y)}\right)^2 \geqslant 0,$$

temos

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}\left(\frac{X-\mathcal{E}(X)}{\sigma(X)} - \frac{Y-\mathcal{E}(Y)}{\sigma(Y)}\right)^2\\ =\ &\mathcal{E}\left(\frac{X-\mathcal{E}(X)}{\sigma(X)}\right)^2 + \mathcal{E}\left(\frac{Y-\mathcal{E}(Y)}{\sigma(Y)}\right)^2 - \frac{2}{\sigma(X)\sigma(Y)}\mathcal{E}[(X-\mathcal{E}(X))(Y-\mathcal{E}(Y))]\\ =\ &\frac{\text{Var(X)}}{\sigma^2(X)} + \frac{\text{Var(Y)}}{\sigma^2(Y)} - \frac{\text{2Cov(X,Y)}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 2 - 2\rho(X,Y)\\ \geqslant\ &0.\end{aligned}$$

Logo $\rho(X,Y) \leqslant 1$.
Substituindo "$-$" por "+" na expressão acima, encontramos a outra desigualdade.

b)

$$\begin{aligned}\rho(X+a,Y+b) &= \frac{\mathcal{E}[(X+a)(Y+b)] - \mathcal{E}(X+a)\mathcal{E}(Y+b)}{\sigma(X+a)\sigma(Y+b)}\\ &= \frac{\mathcal{E}(XY+aY+bX+ab) - [\mathcal{E}(X)+a][\mathcal{E}(Y)+b]}{\sigma(X)\sigma(Y)}\\ &= \frac{\mathcal{E}(XY) - \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\\ &= \rho(X,Y).\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\rho(aX, bY) &= \frac{\mathcal{E}(aXbY) - \mathcal{E}(aX)\mathcal{E}(bY)}{\sigma(aX)\sigma(bY)} \\
&= \frac{ab\mathcal{E}(XY) - ab\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)}{|a||b|\sigma(X)\sigma(Y)} \\
&= \frac{ab}{|ab|}\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \\
&= \frac{ab}{|ab|}\rho(X,Y).
\end{aligned}
$$

8. a) A distribuição de $X + Y$ segue na tabela abaixo:

k	2	3	4	5	6	Total
$\mathcal{P}(X+Y=k)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,0	1,0

Desse modo,

$$\mathcal{E}(X+Y) = 2(0,1) + 3(0,2) + 4(0,3) + 5(0,4) + 6(0,0) = 4.$$

Outra maneira de obter a resposta seria encontrar as distribuições marginais obtendo $\mathcal{E}(X) = 2$ e $\mathcal{E}(Y) = 2$, em seguida aplicar a lei da soma para esperanças.

b) A distribuição de XY segue na tabela abaixo:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
$\mathcal{P}(XY=k)$	0,1	0,2	0,1	0,2	0,0	0,4	0,0	0,0	0,0	1,0

Desse modo,

$$\mathcal{E}(XY) = 1(0,1)+2(0,2)+3(0,1)+4(0,2)+5(0,0)+6(0,4)+7(0,0)+8(0,0)+9(0,0) = 4.$$

c) Claramente, $\mathcal{E}(XY) = \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)$, mas

$$0 = \mathcal{P}(X=3, Y=1) \neq \mathcal{P}(X=3)\mathcal{P}(Y=1) = (0,3)(0,2) = 0,06.$$

d)

$$\mathcal{E}(X+Y)^2 = 2^2(0,1) + 3^2(0,2) + 4^2(0,3) + 5^2(0,4) + 6^2(0,0) = 17.$$

Portanto,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = 17 - 4^2 = 1.$$

9. a) A tabela abaixo apresenta as probabilidades $\mathcal{P}(X=i, Y=j)$ com as respectivas marginais:

X / Y	1	2	3	$\mathcal{P}(X=i)$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
$\mathcal{P}(Y=j)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

b) A distribuição de $Z = X + Y$ segue na tabela abaixo

k	2	3	4	5	6	Total
$\mathcal{P}(X+Y=k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1

enquanto a distribuição da variável $W = XY$ é dada pela tabela

k	1	2	3	4	6	9	Total
$\mathcal{P}(XY=k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1

c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X<Y) &= \mathcal{P}(X=1,Y=2)+\mathcal{P}(X=1,Y=3)+\mathcal{P}(X=2,Y=3)\\
&= 1/6+1/6+1/6\\
&= 1/2.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= \mathcal{E}(Y) = 1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3} = 2\\
\mathcal{E}(Z) &= 3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3} = 4\\
\mathcal{E}(W) &= 2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3} = \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

e) Primeiramente calculamos

$$\mathcal{E}(X^2) = \mathcal{E}(Y^2) = 1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

e, consequentemente

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}.$$

f)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathcal{E}(XY)-\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)\\
&= \mathcal{E}(W)-\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)\\
&= 11/3 - 2\times 2\\
&= -1/3
\end{aligned}$$

10. Da definição temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathcal{E}(X+Y)^2 - \{\mathcal{E}(X+Y)\}^2\\
&= \mathcal{E}(X^2+2XY+Y^2) - \{\mathcal{E}(X)+\mathcal{E}(Y)\}^2\\
&= \mathcal{E}(X^2)+2\mathcal{E}(XY)+\mathcal{E}(Y^2) - \{[\mathcal{E}(X)]^2+2\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)+[\mathcal{E}(Y)]^2\}\\
&= \mathcal{E}(X^2)-[\mathcal{E}(X)]^2+2\{\mathcal{E}(XY)-\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)\}+\mathcal{E}(Y^2)-[\mathcal{E}(Y)]^2\\
&= \mathrm{Var}(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Var}(Y).
\end{aligned}$$

Analogamente, encontramos $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) - 2\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y)$.

11. Vamos supor que homens e mulheres entrem na drogaria de forma independente. Como a soma de duas poissons é uma poisson com os parâmetros somados seja $X_1 \sim \text{Pois}(5)$ e $X_2 \sim \text{Pois}(5)$ as variáveis que representam o números de homens e mulheres que entram na drogaria respectivamente. Desse modo, $X_1 + X_2 \sim \text{Pois}(10)$ como esperávamos. A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X_1 \leqslant 3 | X_2 = 10) &= \mathcal{P}(X_1 \leqslant 3) \\
&= e^{-5} + 5e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} + \frac{5^3}{3!}e^{-5}.
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X = k | X + Y = n) &= \frac{\mathcal{P}(X = k, X + Y = n)}{\mathcal{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathcal{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(X = k)\mathcal{P}(Y = n - k)}{\mathcal{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!} \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \right]^{-1} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}
\end{aligned}$$

ou seja, é a distribuição de uma binomial de parâmetros n e $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

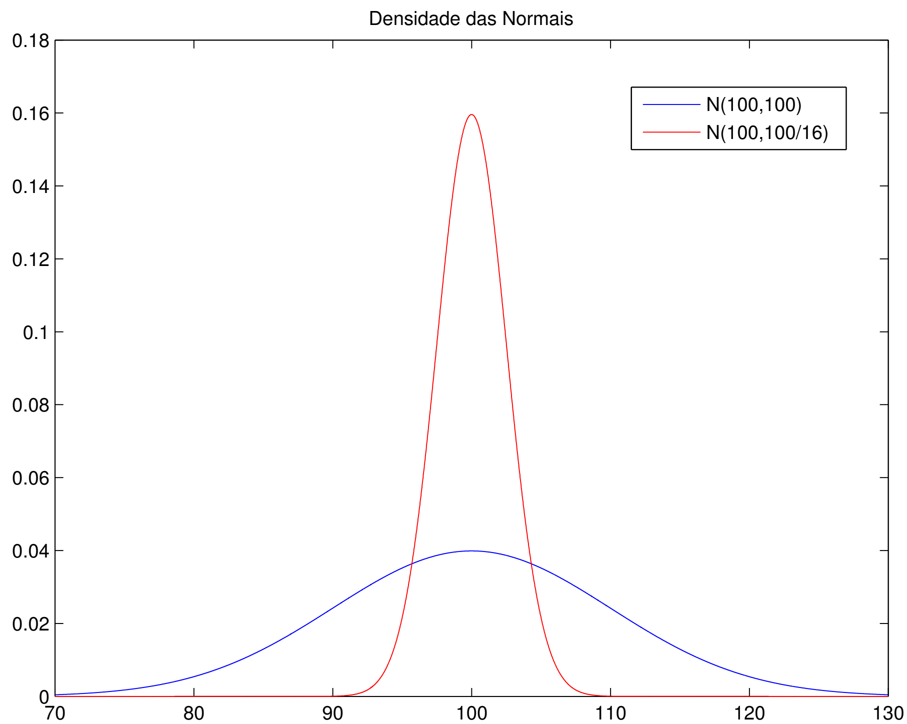
13. a) Sabendo que $X \sim \mathcal{N}(100, 100)$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(90 < X < 110) &= \mathcal{P}\left(\frac{90 - 100}{10} < \frac{X - 100}{10} < \frac{110 - 100}{10} \right) \\
&\simeq \mathcal{P}(-1 < Z < 1) \\
&= 2\mathcal{P}(Z < 1) - 1 \\
&\simeq 2(0,84134) - 1 \\
&= 0,68268.
\end{aligned}$$

b) Como $\overline{X} \sim \mathcal{N}(100, 100/16)$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(90 < \overline{X} < 110\right) &= \mathcal{P}\left(\frac{90 - 100}{10/4} < \frac{\overline{X} - 100}{10/4} < \frac{110 - 100}{10/4} \right) \\
&\simeq \mathcal{P}(-4 < Z < 4) \\
&= 2\mathcal{P}(Z < 4) - 1 \\
&\simeq 2(0,99997) - 1 \\
&= 0,99994.
\end{aligned}$$

c) As densidades seguem na figura abaixo



d) Partindo da equação fornecida e sabendo que $\overline{X} \sim \mathcal{N}(100, 100/n)$, segue que

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{P}\left(90 < \overline{X} < 110\right) = 0,95 \\
\iff \quad & \mathcal{P}\left(\frac{90-100}{10/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-100}{10/\sqrt{n}} < \frac{110-100}{10/\sqrt{n}}\right) = 0,95 \\
\iff \quad & \mathcal{P}(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}) = 0,95 \\
\iff \quad & 2\mathcal{P}(Z < \sqrt{n}) - 1 = 0,95 \\
\iff \quad & \mathcal{P}(Z < \sqrt{n}) = 0,975 \\
\iff \quad & \sqrt{n} \simeq 1,96 \\
\iff \quad & n \simeq 3,84.
\end{aligned}
$$

Como n deve ser inteiro concluímos que seu valor deve ser, pelo menos, 4.

14. a) Nós temos que $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10^2)$, então

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{P}(X < 500) = 0,10 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{P}\left(\frac{X-\mu}{10} < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0,10 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{P}\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0,10 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{P}\left(Z > -\frac{500-\mu}{10}\right) = 0,10 \\
\Longleftrightarrow \quad & 1-\mathcal{P}\left(Z < \frac{\mu-500}{10}\right) = 0,10 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{P}\left(Z < \frac{\mu-500}{10}\right) = 0,90 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{\mu-500}{10} = 1,28 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mu = 512,8.
\end{aligned}
$$

b) O peso total dos pacotes é dado por

$$S_4 = X_1 + \cdots + X_4 \sim \mathcal{N}(4 \times 512,8 \ ; \ 4 \times 10^2).$$

Desse modo temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(S_4 < 2000) &= \mathcal{P}\left(\frac{S_4 - 2051,2}{20} < \frac{2000-2051,2}{20}\right) \\
&\simeq \mathcal{P}(Z < -2,56) \\
&= \mathcal{P}(Z > 2,56) \\
&= 1-\mathcal{P}(Z < 2,56) \\
&= 1-0,99477 \\
&= 0,00523.
\end{aligned}
$$

15. O peso total dos passageiros é dado por

$$S_7 = X_1 + \cdots + X_7 \sim \mathcal{N}(7 \times 70 \ , \ 7 \times 100).$$

Desse modo temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(S_7 > 500) &= \mathcal{P}\left(\frac{S_7 - 490}{10\sqrt{7}} > \frac{500-490}{10\sqrt{7}}\right) \\
&\simeq \mathcal{P}(Z > 0,38) \\
&= 1-\mathcal{P}(Z < 0,38) \\
&= 1-0,64803 \\
&= 0,35197.
\end{aligned}
$$

16. Inicialmente temos $X \sim \mathcal{N}(200, 100)$.

   a) A probabilidade de um pacote pesar menos de 205 gramas é

   $$\mathcal{P}(X < 205) = \mathcal{P}\left(Z < \frac{205 - 200}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{P}(Z < 0,5) = 0,69146.$$

   Como sorteamos 25 pacotes aleatoriamente, o número esperado de pacotes com peso menor que 205 gramas é $0,69146 \times 25 = 17,2865$.

   b) Denotando $S_{25} = X_1 + \cdots + X_{25}$, sabemos que $S_{25} \sim \mathcal{N}(25 \times 200, 25 \times 100)$. Desse modo

   $$\mathcal{P}(S_{25} < 5125) = \mathcal{P}\left(Z < \frac{5125 - 25 \times 200}{\sqrt{25 \times 100}}\right) = \mathcal{P}(Z < 2,5) = 0,99379.$$

17. a) O valor esperado é dado por

   $$\mu = 200(0,45) = 90,$$

   e o desvio padrão é dado por

   $$\sigma = \sqrt{200(0,45)(1 - 0,45)} = 7,0356.$$

   b) Como estamos interessados em aproximar a probabilidade pela normal, se representarmos por X o número de indivíduos a favor do candidato e Y uma v.a. com distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, basta aplicarmos o Teorema de DeMoivre-Laplace e

   $$\begin{aligned}
   \mathcal{P}(X > 101) &\simeq \mathcal{P}(Y > 100,5) \\
   &= \mathcal{P}\left(\frac{Y - 90}{7,0356} > \frac{100,5 - 90}{7,0356}\right) \\
   &\simeq \mathcal{P}(Z > 1,49) \\
   &= 1 - \mathcal{P}(Z < 1,49) \\
   &\simeq 1 - 0,93189 \\
   &= 0,06811.
   \end{aligned}$$

18. Se o máximo de um conjunto é menor que um valor então, obviamente, todos os outros elementos do conjunto também serão menores que este valor. Com base nessa idéia note que para X, uma v.a. com mesma distribuição dos X_i's temos

   $$\begin{aligned}
   F_M(m) &= \mathcal{P}(M \leqslant m) \\
   &= \mathcal{P}(\text{Max}(X_1, \ldots, X_n) \leqslant m) \\
   &= \mathcal{P}(X_1 \leqslant m, \ldots, X_n \leqslant m) \\
   &= \mathcal{P}(X_1 \leqslant m) \cdots \mathcal{P}(X_n \leqslant m) \\
   &= [F_X(m)]^n.
   \end{aligned}$$

   Para encontrar a densidade basta derivar a função distribuição:

$$
\begin{aligned}
f_M(m) &= \frac{d}{dm} F_M(m) \\
&= \frac{d}{dm} [F_X(m)]^n \\
&= n[F_X(m)]^{n-1} f_X(m).
\end{aligned}
$$

19. Se $X \sim \mathcal{U}(0, \theta)$, temos

$$
f_X(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & \text{se} \quad m \in (0, \theta), \\ 0 & \text{se} \quad m \notin (0, \theta). \end{cases}
$$

e

$$
F_X(m) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \leqslant 0, \\ \dfrac{m}{\theta}, & \text{se} \quad m \in (0, \theta), \\ 1 & \text{se} \quad m \geqslant \theta. \end{cases}
$$

Portanto

$$
f_M(m) = \begin{cases} \dfrac{nm^{n-1}}{\theta^n}, & \text{se} \quad m \in (0, \theta), \\ 0, & \text{se} \quad m \notin (0, \theta). \end{cases}
$$

e

$$
F_M(m) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \leqslant 0, \\ \dfrac{m^n}{\theta^n}, & \text{se} \quad m \in (0, \theta), \\ 1, & \text{se} \quad m \geqslant \theta. \end{cases}
$$