Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

4ª Lista de PE – Solução

1. a) Para que $f(x)$ seja uma densidade devemos ter

$$1 = \int_{-1}^{1} C(1-x^2)dx = C\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}C.$$

Isso ocorre se, e somente se, $C = \dfrac{3}{4}$.

b) Para $-1 < x < 1$ nós temos

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-y^2)dy = \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right).$$

Segue que a função distribuição da v.a X é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leqslant -1, \\ \dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\right), & \text{se} \quad -1 < x < 1, \\ 1, & \text{se} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

c) Primeiramente calculemos,

$$\mathcal{E}(X) = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}x(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Agora

$$\mathcal{E}|X| = \int_{-1}^{0} \frac{3}{4}(-x)(1-x^2)dx + \int_{0}^{1} \frac{3}{4}x(1-x^2)dx = 2 \times \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{3}{8}.$$

2. a) Integrando por partes podemos encontrar um primitiva para $xe^{-x/2}$,

$$G(X) = \int xe^{-x/2}dx = -2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2}.$$

Para que $f(x)$ seja uma densidade devemos ter

$$1 = \int_{0}^{\infty} f(x)dx = C\int_{0}^{\infty} xe^{-x/2}dx = C\left\{\lim_{M\to\infty} G(M) - G(0)\right\} = 4C.$$

Tendo em vista que na penúltima igualdade utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo, isso ocorre se, e somente se, $C = \frac{1}{4}$.

b) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função distribuição para $x > 0$ é dada por

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(y)dy = \frac{1}{4}\{G(x) - G(0)\} = 1 - \frac{1}{2}xe^{-x/2} - e^{-x/2}.$$

Portanto, a função distribuição é definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1}{2}xe^{-x/2} - e^{-x/2}, & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

c) Novamente, integrando por partes, podemos encontrar uma primitiva para $x^2e^{-x/2}$,

$$H(X) = \int x^2 e^{-x/2}dx = -2x^2e^{-x/2} - 8xe^{-x/2} - 16e^{-x/2}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a esperança de X é dada por

$$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^2e^{-x/2}dx = \frac{1}{4}\left\{\lim_{M\to\infty} H(M) - H(0)\right\} = 4.$$

3. a) Como sabemos, a integral da função densidade no intervalo dos reais deve ser um. Desse modo,

$$1 = \int_0^3 \left(\frac{1}{6}x + k\right)dx = \left(\frac{x^2}{12} + kx\right)\Big|_0^3 = \frac{3+12k}{4}.$$

Isso ocorre se, e somente se, $k = 1/12$.

b)

$$\mathcal{P}(1 < X < 2) = \int_1^2 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}\right)dx = \left(\frac{x^2}{12} + \frac{x}{12}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}.$$

c) Do enunciado temos que

$$\frac{1}{2} = \mathcal{P}(X < a) = \int_0^a \left(\frac{1}{6}x + \frac{x}{12}\right)dx = \left(\frac{x^2}{12} + \frac{x}{12}\right)\Big|_0^a = \frac{a^2}{12} + \frac{a}{12}.$$

Isso ocorre se, e somente se, $a = 2$.

4. a) Como a densidade está definida no intervalo [0,3] o tempo máximo que uma peça pode ficar sem se corroer é 3 anos.

b) Para que $f(x)$ seja uma densidade devemos ter

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 kxdx + \int_1^2 kdx + \int_2^3 (-kx+3k)dx \\ &= \frac{kx^2}{2}\Big|_0^1 + kx|_1^2 + \left(-\frac{kx^2}{2} + 3kx\right)\Big|_2^3 \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Isso ocorre se, e somente se, $k = 1/2$.

c)

$$\mathcal{P}(0,5 < X < 1,5) = \int_{0,5}^1 \frac{x}{2}dx + \int_1^{1,5} \frac{1}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{0,5}^1 + \frac{x}{2}\Big|_1^{1,5} = \frac{7}{16}.$$

d)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & \text{se} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{(x-1)}{4}, & \text{se} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{-x^2+6x-5}{4}, & \text{se} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{se} \quad x > 3. \end{cases}$$

5. De acordo com o enunciado a probabilidade de uma peça ser boa é $\mathcal{P}(X > 2) = 1 - F(2) = 1/4$. Como a seleção das peças é realizada com reposição, se considerarmos a variável Y correspondente ao número de peças boas dentre as 3 selecionadas, concluímos que $Y \sim \text{Bin}(3, 1/4)$.

   a) $\mathcal{P}(Y = 3) = \binom{3}{3}(1/4)^3(3/4)^0 = 1/64.$

   b) $\mathcal{P}(Y = 0) = \binom{3}{0}(1/4)^0(3/4)^3 = 27/64.$

   c) $\mathcal{P}(Y = 1) = \binom{3}{1}(1/4)^1(3/4)^2 = 27/64.$

6. Seja $f(k) = \mathcal{E}(X^2 - 2kX + k^2) = \mathcal{E}(X^2) - 2k\mathcal{E}(X) + k^2$. Derivando a função temos

$$f'(k) = -2\mathcal{E}(X) + 2k$$

   que possui ponto crítico em $k = \mathcal{E}(X)$. Como $f''(k) = 2 > 0$, concluímos que $k = \mathcal{E}(X)$ é o ponto de mínimo da função.

7. Por um lado, para que $f(x)$ seja uma densidade, devemos ter

$$1 = \int_0^1 (a + bx^2)dx = \left(ax - b\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = a + \frac{b}{3}.$$

   Por outro lado, devemos ter

$$\frac{3}{5} = \mathcal{E}(X) = \int_0^1 x(a + bx^2)dx = \left(a\frac{x^2}{2} - b\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}.$$

   Resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{3} = 1 \\[2ex] \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{4} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

   encontramos $a = \dfrac{3}{5}$ e $b = \dfrac{6}{5}$.

8. a) $\mathcal{P}(X > 1,5) = \displaystyle\int_{1,5}^3 \left(-\frac{x}{3} + 1\right) dx = \left(-\frac{x^2}{6} + x\right)\Bigg|_{0,5}^3 = \frac{3}{8}.$

   b) $\mathcal{E}(X) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{3}dx + \int_1^3 \left(-\frac{x^2}{3} + x\right) dx = \frac{2x^3}{9}\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{4}{3}.$

   Considerando que desejamos o valor médio em 30 dias, teremos como resultado $4/3 \times 30 = 4$ toneladas.

   c) Primeiramente calculamos

$$\mathcal{E}(X^2) = \int_0^1 \frac{2x^3}{3}dx + \int_1^3 \left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right) dx = \frac{2x^4}{12}\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{13}{6}.$$

   Segue que $\text{Var}(X) = \frac{13}{6} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{7}{18}$.

d) Queremos encontrar k tal que $\mathcal{P}(X \leqslant k) = 0,95$. Para tal, necessitamos da função de distribuição que é dada por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & \text{se} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{-x^2+6x-3}{6}, & \text{se} \quad 1 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{se} \quad x > 3. \end{cases}$$

É claro, da equação acima, que o valor de k deve ser maior que um, desse modo basta resolver a equação

$$\frac{-x^2+6x-3}{6} = 0,95$$

que encontraremos $k = 2,45$. Como os valores são dados em centenas, a resposta desejada é 245kg.

9. Lembrando que para obtermos a densidade de uma variável aleatória contínua basta derivarmos a função distribuição temos

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathcal{P}(Y \leqslant x) = \mathcal{P}(\log(2X+3) \leqslant x) \\ &= \mathcal{P}(2X+3 \leqslant e^x) = \mathcal{P}\left(X \leqslant \frac{e^x-3}{2}\right) \\ &= F_X\left(\frac{e^x-3}{2}\right). \end{aligned}$$

Desse modo, segue que

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = \frac{d}{dx}F_X\left(\frac{e^x-3}{2}\right) = \frac{1}{2}e^x f_X\left(\frac{e^x-3}{2}\right).$$

10. Vamos considerar X a variável que representa o horário em que o passageiro chega à parada após as 7:00 AM. Desse modo, temos que $X \sim \mathcal{U}(0,30)$.

a) O passageiro irá esperar 5 minutos pelo ônibus se chegar entre 7:10 e 7:15 ou entre 7:25 e 7:30. Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{“\textit{esperar menos de 5 min}”}) &= \mathcal{P}(10 < X < 15) + \mathcal{P}(25 < X < 30) \\ &= \int_{10}^{15} \frac{1}{30}dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}dx \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) Analogamente, o passageiro irá esperar mais de 10 minutos pelo ônibus se chegar entre 7:00 e 7:05 ou entre 7:15 e 7:20. Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{“\textit{esperar mais de 10 min}”}) &= \mathcal{P}(0 < X < 5) + \mathcal{P}(15 < X < 20) \\ &= \int_{0}^{5} \frac{1}{30}dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30}dx \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

11. Como $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, onde $a < b$; resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} \mathcal{E}(X) = \dfrac{a+b}{2} = 1 \\ \mathrm{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

encontramos $a = 0,5$ e $b = 1,5$.

a) $\mathcal{P}(X < 3/4) = \dfrac{3/4 - 0,5}{1,5 - 0,5} = 1/4.$

b) $\mathcal{P}(0,8 < X < 1,2) = \dfrac{1,2 - 0,8}{1,5 - 0,5} = 0,4.$

c) Como os eventos $X < 0,6$ e $X > 1,3$ são disjuntos,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[(X < 0,6) \cup (X > 1,3) | X > 1] &= \mathcal{P}(X < 0,6 | X > 1) + \mathcal{P}(X > 1,3 | X > 1) \\ &= \frac{\mathcal{P}(\{X < 0,6\} \cap \{X > 1\})}{P(X > 1)} + \frac{\mathcal{P}(\{X > 1,3\} \cap \{X > 1\})}{\mathcal{P}(X > 1)} \\ &= 0 + \frac{\mathcal{P}(X > 1,3)}{\mathcal{P}(X > 1)} \\ &= \frac{(1,5 - 1,3)/(1,5 - 0,5)}{(1,5 - 1)/(1,5 - 0,5)} = 0,4. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X > k) &= 2\mathcal{P}(X < k) \iff \\ \frac{1,5 - k}{1,5 - 0,5} &= 2\left[\frac{k - 0,5}{1,5 - 0,5}\right] \iff \\ 1,5 - k &= 2k - 1 \iff \\ k &= 5/6 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(g(X)) &= \int_{0,5}^{0,8} x dx + \int_{0,8}^{1} 1 dx + \int_{1}^{1,5} -(x+1) dx \\ &= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,5}^{0,8} + x|_{0,8}^{1} - \left.\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right|_{1}^{1,5} \\ &= -0,73. \end{aligned}$$

12. Se $X \sim \mathcal{U}(0,5)$ representa o tamanho do lado do quadrado, então sua área será X^2. Segue que

$$\mathcal{E}(X^2) = \int_0^5 \frac{x^2}{5} dx = \left.\frac{x^3}{15}\right|_0^5 = \frac{25}{3}.$$

13. Seja $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, então

a)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(X<20) &= \mathcal{P}\left(\frac{X-10}{\sqrt{36}}<\frac{20-10}{\sqrt{36}}\right) \\
&\simeq \mathcal{P}(Z<1,67) \\
&\simeq 0,95254.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(X>16) &= 1-\mathcal{P}(X\leqslant 16) \\
&= 1-\mathcal{P}\left(\frac{X-10}{\sqrt{36}}<\frac{16-10}{\sqrt{36}}\right) \\
&= 1-\mathcal{P}(Z\leqslant 1) \\
&\simeq 1-0,84134 \\
&= 0,15866.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(X>5) &= \mathcal{P}\left(\frac{X-10}{\sqrt{36}}>\frac{5-10}{\sqrt{36}}\right) \\
&\simeq \mathcal{P}(Z>-0,83) \\
&= \mathcal{P}(Z<0,83) \\
&\simeq 0,79673
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(4<X<16) &= \mathcal{P}\left(\frac{4-10}{\sqrt{36}}<\frac{X-10}{\sqrt{36}}<\frac{16-10}{\sqrt{36}}\right) \\
&= \mathcal{P}(-1<Z<1) \\
&= \mathcal{P}(Z<1)-\mathcal{P}(Z<-1) \\
&= \mathcal{P}(Z<1)-\mathcal{P}(Z>1) \\
&= \mathcal{P}(Z<1)-\{1-\mathcal{P}(Z\leqslant 1)\} \\
&= 2\mathcal{P}(Z<1)-1 \\
&\simeq 2(0,84134)-1 \\
&= 0,68268
\end{aligned}
$$

e)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(|X| < 8) &= \mathcal{P}(-8 < X < 8) \\
&= \mathcal{P}\left(\frac{-8-10}{\sqrt{36}} < \frac{X-10}{\sqrt{36}} < \frac{8-10}{\sqrt{36}}\right) \\
&\simeq \mathcal{P}(-3 < Z < -0,33) \\
&= \mathcal{P}(Z < -0,33) - \mathcal{P}(Z < -3) \\
&= \mathcal{P}(Z > 0,33) - \mathcal{P}(Z > 3) \\
&= 1 - \mathcal{P}(Z < 0,33) - \{1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 3)\} \\
&\simeq -0,62930 + 0,99865 \\
&= 0,36935
\end{aligned}$$

14. Seja X a variável que representa o período de gestação, e suponha que o réu é, de fato, o pai. Desse modo, a probabilidade de que o nascimento possa ter ocorrido no período indicado é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\{X > 290\} \cup \{X < 240\}) &= \mathcal{P}(X > 290) + \mathcal{P}(X < 240) \\
&= \mathcal{P}\left(\frac{X-270}{\sqrt{100}} > \frac{290-270}{\sqrt{100}}\right) + \mathcal{P}\left(\frac{X-270}{\sqrt{100}} < \frac{240-270}{\sqrt{100}}\right) \\
&= \mathcal{P}(Z > 2) + \mathcal{P}(Z < -3) \\
&= 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 2) + \mathcal{P}(Z > 3) \\
&= 2 - \mathcal{P}(Z \leqslant 2) - \mathcal{P}(Z \leqslant 3) \\
&= 2 - 0,97725 - 0,99865 \\
&\simeq 0,0241
\end{aligned}$$

15. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, portanto

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(X \leqslant k) = 2p(X > k) \iff \\
&\mathcal{P}(X \leqslant k) = 2\{1 - \mathcal{P}(X \leqslant k)\} \iff \\
&\mathcal{P}(X \leqslant k) = 2/3 \iff \\
&\mathcal{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 2/3 \iff \\
&\mathcal{P}\left(Z \leqslant \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 2/3 \iff \\
&\frac{k-\mu}{\sigma} = 0,43 \iff \\
&k = 0,43\sigma + \mu
\end{aligned}$$

16. Primeiramente devemos definir de forma adequada as variáveis e eventos associados ao

experimento. Sejam $A_M \sim \mathcal{N}(1,6;0,09)$, $A_H \sim \mathcal{N}(1,8;0,16)$ e considere os eventos

$$\begin{aligned} H &= \text{“o indivíduo é homem”} \\ M &= \text{“o indivíduo é mulher”} \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{“medir +1,7”}|H) &= \mathcal{P}\left(A_H > \frac{1,7-1,8}{\sqrt{0,16}}\right) = \mathcal{P}\left(\frac{A_H - 1,8}{\sqrt{0,16}}\right) \\ &= \mathcal{P}(Z > -0,25) = \mathcal{P}(Z \leqslant 0,25) \\ &= 0,59871. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M|\text{“medir -1,8”}) &= \frac{\mathcal{P}(\text{“medir -1,8”}|M)\mathcal{P}(M)}{\mathcal{P}(\text{“medir -1,8”})} \\ &= \frac{\mathcal{P}(\text{“medir -1,8”}|M)\mathcal{P}(M)}{\mathcal{P}(\text{“medir -1,8”}|M)\mathcal{P}(M) + \mathcal{P}(\text{“medir -1,8”}|H)\mathcal{P}(H)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(A_M < 1,8)\mathcal{P}(M)}{\mathcal{P}(A_M < 1,8)\mathcal{P}(M) + \mathcal{P}(A_H < 1,8)\mathcal{P}(H)} \\ &= \frac{\mathcal{P}\left(\frac{A_M-1,6}{\sqrt{0,09}} < \frac{1,8-1,6}{\sqrt{0,09}}\right)\mathcal{P}(M)}{\mathcal{P}\left(\frac{A_M-1,6}{\sqrt{0,09}} < \frac{1,8-1,6}{\sqrt{0,09}}\right)\mathcal{P}(M) + \mathcal{P}\left(\frac{A_H-1,8}{\sqrt{0,16}} < \frac{1,8-1,8}{\sqrt{0,16}}\right)\mathcal{P}(H)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(Z < 0,67) \times \frac{1}{3}}{\mathcal{P}(Z < 0,67) \times \frac{1}{3} + \mathcal{P}(Z < 0) \times \frac{2}{3}} \\ &= \frac{0,74857 \times \frac{1}{3}}{0,74857 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{2}{3}} \\ &= 0,4281. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(\text{“medir +1,5 e -1,7”}) \\ = \; & \mathcal{P}(\text{“medir +1,5 e -1,7”}|M)\mathcal{P}(M) + \mathcal{P}(\text{“medir +1,5 e -1,7”}|H)\mathcal{P}(H) \\ = \; & \mathcal{P}(1,5 < A_M < 1,7)\mathcal{P}(M) + \mathcal{P}(1,5 < A_H < 1,7)\mathcal{P}(H) \\ = \; & \{\mathcal{P}(A_M < 1,7) - \mathcal{P}(A_M < 1,5)\}\mathcal{P}(M) + \{\mathcal{P}(A_H < 1,7) - \mathcal{P}(A_H < 1,5)\}\mathcal{P}(H) \\ = \; & \{\mathcal{P}(Z < 0,33) - \mathcal{P}(Z < -0,33)\}\mathcal{P}(M) + \{\mathcal{P}(A_H < -0,25) - \mathcal{P}(A_H < -0,75)\}\mathcal{P}(H) \\ = \; & \{0,6293 - 0,3707\} \times \frac{1}{3} + \{0,40129 - 0,22663\} \times \frac{2}{3} \\ = \; & 0,20264. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(H e \text{“medir +2”}) &= \mathcal{P}(\text{“medir +2”}|H)\mathcal{P}(H) \\
&= \mathcal{P}(A_H > 2)\mathcal{P}(H) \\
&= \mathcal{P}(Z > 0,5) \times \frac{2}{3} \\
&= (1 - 0,69146) \times \frac{2}{3} \\
&= 0,20569.
\end{aligned}$$

e) Nesta questão algumas probabilidades já foram calculadas no **item b)** de modo que iremos apenas substituir os valores:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}(M \cup \text{“medir -1,8”}) \\
= \; & \mathcal{P}(M) + \mathcal{P}(\text{“medir -1,8”}) - \mathcal{P}(M \cap \text{“medir -1,8”}) \\
= \; & \mathcal{P}(M) + \mathcal{P}(\text{“medir -1,8”}) - \mathcal{P}(\text{“medir -1,8”}|M)\mathcal{P}(M) \\
= \; & \frac{1}{3} + \left(0,74857 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{2}{3}\right) + 0,74857 \times \frac{1}{3} \\
= \; & 0,6667.
\end{aligned}$$

f) Primeiramente defina $p = \mathcal{P}(\text{“medir -1,6”})$. A probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}(\text{“exatamente 3 em 5 medir -1,6”}) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2.$$

Então nos basta encontrar p, que é dado por

$$\begin{aligned}
p &= \mathcal{P}(\text{“medir -1,6”}|M)\mathcal{P}(M) + \mathcal{P}(\text{“medir -1,6”}|H)\mathcal{P}(H) \\
&= \mathcal{P}(A_M < 1,6)\mathcal{P}(M) + \mathcal{P}(A_H < 1,6)\mathcal{P}(H) \\
&= \mathcal{P}(Z < 0) \times \frac{1}{3} + \mathcal{P}(A_H < -0,5) \times \frac{2}{3} \\
&= 0,5 \times \frac{1}{3} + 0,30854 \times \frac{2}{3} \\
&= 0,37236.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor encontrado para p temos

$$\mathcal{P}(\text{“exatamente 3 em 5 medir -1,6”}) = 0,20338.$$

17. Se X denota o número de estudantes que permanecem na faculdade, então X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 450$ e $p = 0,3$ e a probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X > 150) &= 1 - \mathcal{P}(X \leqslant 150) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{150} \mathcal{P}(X = i) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{150} \binom{450}{i} (0,3)^i (0,7)^{450-i}.
\end{aligned}$$

A soma acima é bastante complicada de se fazer manualmente (uma das razões de se usar a aproximação Normal à Binomial) e levaria um bom tempo para terminá-la. Com o uso de um simples algoritmo, um computador pode calcular a soma acima resultando no valor aproximado de 0,0565.

Podemos aproximar X por uma normal. Para tal, consideramos $Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$, ou seja, uma normal de parâmetros $\mu = 135$ e $\sigma^2 = 94,5$. Como X é discreta e Y contínua, aplicando o Teorema de DeMoivre-Laplace aproximamos X por Y como abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X > 150) &\simeq \mathcal{P}(Y \geqslant 150) \\
&= \mathcal{P}\left(\frac{Y-135}{\sqrt{94,5}} \geqslant \frac{150-135}{\sqrt{94,5}}\right) \\
&\simeq 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 1,54) \\
&\simeq 1 - 0,93822 \\
&= 0,06178
\end{aligned}$$

18. Observe que $X \sim \text{Bin}(40, 1/2)$.

a) Queremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(19 < X \leqslant 21) &= \mathcal{P}(X = 20) + \mathcal{P}(X = 21) \\
&= \binom{40}{20} 0,5^{40} + \binom{40}{21} 0,5^{40} \\
&= 0,24477
\end{aligned}$$

b) Note que $\mathcal{E}(X) = 20$ e $\text{Var}(X) = 10$. Agora defina $Y \sim \mathcal{N}(20, 10)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(19 < X \leqslant 21) &\approx \mathcal{P}(19 < Y \leqslant 21) \\
&= \mathcal{P}\left(\frac{19-20}{\sqrt{10}} < \frac{Y-20}{\sqrt{10}} < \frac{21-20}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \mathcal{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} < Z < \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \\
&\approx 2\mathcal{P}(Z < 0,32) - 1 \\
&= 2(0,62552) - 1 \\
&= 0,25104
\end{aligned}$$

19. a) Para $x > v$ a função de distribuição é $\int_v^x f(y)dy$. Com uma substituição simples, $u = \frac{x-v}{\alpha}$, a integral se torna bastante fácil e

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leqslant v, \\ 1 - \exp\left\{-\left(\dfrac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}, & \text{se} \quad x > v. \end{cases}$$

b) Quando $\beta = 1$ e $v = 0$, a distribuição de Weibull se torna uma exponencial de parâmetro $1/\alpha$. Como sabemos, a esperança de uma variável aleatória exponencial $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ é $1/\lambda$. Em nosso caso, teremos $\mathcal{E}(X) = \alpha$.

20. Seja X a variável que representa número de anos em que o rádio funciona. Em nosso caso temos $X \sim \text{Exp}(1/8)$ e consequentemente, $F(x) = 1 - e^{-x/8}$, para $x > 0$. Segue que
$$\mathcal{P}(X > 8) = 1 - F(8) = e^{-1}.$$

21. No nosso caso temos que $X \sim \text{Exp}(0,1)$ de modo que $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$.

   a) $F(20) = 1 - e^{-0,1\times 20} = 1 - e^{-2}$.
   b) $\mathcal{P}(X > 20) = 1 - F(20) = e^{-2}$.
   c) $\mathcal{P}(X > 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-0,1\times 10}) = e^{-1}$.

22. Seja $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e sejam $x \geqslant 0$ e $t \geqslant 0$. Segue que
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X > x + t | X > t) &= \frac{\mathcal{P}(\{X > x + t\} \cap \{X > t\})}{\mathcal{P}(X > t)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(X > x + t)}{\mathcal{P}(X > t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda x} \\
&= \mathcal{P}(X > x).
\end{aligned}$$

23. Seja X a variável que representa o tempo de vida da bateria do carro. Como a média é 10.000 milhas, temos que $X \sim \text{Exp}(1/10.000)$ e $F(x) = 1 - e^{-x/10.000}$. Queremos calcular a probabilidade do tempo de vida da bateria do carro ser maior que 10.000 dado que é maior que 5.000.
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X > 10.000 | X > 5.000) &= \mathcal{P}(X > 5.000 + 5.000 | X > 5.000) \\
&= \mathcal{P}(X > 5.000) \\
&= 1 - F(5.000) \\
&= e^{-1/2} \\
&\simeq 0,607.
\end{aligned}$$
Observe que na segunda igualdade usamos a propriedade de perda de memória da distribuição exponencial.

24. Seja $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

   a) $\mathcal{P}(X \leqslant \mu + 2\sigma) = \mathcal{P}\left(Z \leqslant \frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \mathcal{P}(Z \leqslant 2) = 0,97725$.

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(|X-\mu|\leqslant\sigma) &= \mathcal{P}\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\leqslant 1\right)=\mathcal{P}(|Z|\leqslant 1)\\ &= 2\mathcal{P}(Z<1)-1=2(0,84134)-1\\ &= 0,68268.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(X>a)=0,9 \iff\\ &\mathcal{P}(X\leqslant -a)=0,9 \iff\\ &\mathcal{P}\left(Z\leqslant\frac{-a-\mu}{\sigma}\right)=0,9 \iff\\ &-\frac{(a+\mu)}{\sigma}=1,28 \iff\\ &a=-(\mu+1,28\sigma).\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mu-1,96\sigma<X<\mu+1,96\sigma) &= \mathcal{P}\left(-1,96<\frac{X-\mu}{\sigma}<1,96\right)\\ &= \mathcal{P}(-1,96<Z<1,96)\\ &= 2\mathcal{P}(Z<1,96)-1\\ &\simeq 2(0,97500)-1\\ &= 0,95.\end{aligned}$$

e) Nós queremos que

$$\begin{aligned}0,99 &= \mathcal{P}(\mu-\beta\sigma<X<\mu+\beta\sigma)\\ &= \mathcal{P}\left(-\beta<\frac{X-\mu}{\sigma}<\beta\right)\\ &= \mathcal{P}(-\beta<Z<\beta)\\ &= 2\mathcal{P}(Z<\beta)-1.\end{aligned}$$

A igualdade acima ocorre se, e somente se, $\mathcal{P}(Z<\beta)=0,995$, ou seja, $\beta=2,58$.

25. Sejam $X\sim \text{Exp}(2)$, $Y\sim\text{Exp}(1)$ e considere os eventos

$$\begin{aligned}F &= \text{“o cliente é pessoa física”}\\ J &= \text{“o cliente é pessoa jurídica”}\end{aligned}$$

a) $\mathcal{P}(\text{“+1 min”}|F)=\mathcal{P}(X>1)=1-F_X(1)=1-(1-e^{-2})=e^{-2}\approx 0,13534.$

b) $\mathcal{P}(\text{“-5 min”}|J) = \mathcal{P}(Y < 5) = F(5) = 1 - e^{-1\times 5} = 1 - e^{-5} \approx 0,99326.$

c)

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(\text{“+2 min”}) \\ = \; & \mathcal{P}(\text{“+2 min”}|F)\mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(\text{“+2 min”}|J)\mathcal{P}(J) \\ = \; & \mathcal{P}(X > 2) \times 0,3 + \mathcal{P}(Y > 2) \times 0,7 \\ = \; & e^{-4} \times 0,3 + e^{-2} \times 0,7 \\ = \; & 0,10023. \end{aligned}$$

d) Pela perda de memória da exponencial temos que

$$\mathcal{P}(\text{“+4 min dado F”}|\text{“+3 min dado F”}) = \mathcal{P}(X > 4|X > 3) = \mathcal{P}(X > 1) \approx 0,13534.$$

e)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(J|\text{“+2 min”}) &= \frac{\mathcal{P}(J \cap \text{“+2 min”})}{\mathcal{P}(\text{“+2 min”})} \\ &= \frac{\mathcal{P}(\text{“+2 min”}|J)\mathcal{P}(J)}{\mathcal{P}(\text{“+2 min”})} = \frac{\mathcal{P}(Y > 2)}{0,10023} \\ &= \frac{e^{-2} \times 0,7}{0,10023} \approx 0,94518. \end{aligned}$$

26. a) Observe que X é determinado pela variável aleatória θ que representa o ângulo entre o feixe de luz e o eixo y. Claramente, $\theta \sim \mathcal{U}(-\pi/2, \pi/2)$ e sua distribuição é

$$F_\theta(x) = \mathcal{P}(\theta \leqslant x) = \frac{x - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}.$$

Como estamos interessados na distribuição de X, basta observar que $X = \tan(\theta)$ e, para $-\infty < x < \infty$, segue que

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathcal{P}(X \leqslant x) \\ &= \mathcal{P}(\tan(\theta) \leqslant x) \\ &= \mathcal{P}(\theta \leqslant \arctan(x)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}. \end{aligned}$$

Desse modo, ainda para $-\infty < x < \infty$, chegamos a

$$f(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\arctan(x)}{\pi}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{\pi} = 1$$

c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}|X| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-x) \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx + \int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= 2 \int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{M \to +\infty} \ln(1+x^2)\Big|_0^M \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

27. Para $y \geqslant 0$ temos

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathcal{P}(Y \leqslant y) \\
&= \mathcal{P}(|X| \leqslant y) \\
&= \mathcal{P}(-y \leqslant X \leqslant y) \\
&= \mathcal{P}(X \leqslant y) - \mathcal{P}(X \leqslant -y) \\
&= F_X(y) - F_X(-y).
\end{aligned}$$

Derivando ambos os lados nós obtemos,

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y).$$

28. Para $y \geqslant 0$ temos

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathcal{P}(Y \leqslant y) \\
&= \mathcal{P}(X^n \leqslant y) \\
&= \mathcal{P}\left(X \leqslant y^{1/n}\right) \\
&= F_X\left(y^{1/n}\right).
\end{aligned}$$

Derivando ambos os lados nós obtemos,

$$f_Y(y) = \frac{1}{n} y^{1/n-1} f_X\left(y^{1/n}\right).$$

29. a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(|X| > 1/2) &= 1 - \mathcal{P}(|X| < 1/2) \\
&= 1 - \mathcal{P}(-1/2 < X < 1/2) \\
&= 1 - \{\mathcal{P}(X < 1/2) - \mathcal{P}(X < -1/2)\} \\
&= 1/2.
\end{aligned}$$

b) Da **Questão 27**, temos que

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = 1.$$

Ou seja, $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$.

30. Para que as raízes da equação sejam reais devemos ter

$$\Delta = (4Y)^2 - 16(Y+2) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad Y^2 \geqslant Y + 2.$$

Como $0 < Y < 5$, a relação acima ocorre se, e somente se, $Y \geqslant 2$. Então

$$\mathcal{P}(Y^2 \geqslant Y+2) = \mathcal{P}(Y \geqslant 2) = \frac{3}{5}.$$

31. Para $y \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Y \leqslant y) &= \mathcal{P}(\log X \leqslant y) \\ &= \mathcal{P}(X \leqslant e^y) \\ &= 1 - e^{-e^y}. \end{aligned}$$

Derivando, nós obtemos

$$f_Y(y) = e^y e^{-e^y}.$$

32. Para $1 < y < e$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Y \leqslant y) &= \mathcal{P}(e^X \leqslant y) \\ &= \mathcal{P}(X \leqslant \log y) \\ &= \log y. \end{aligned}$$

Derivando nós obtemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{y}.$$

33. Primeiramente, observe que se Z é normal padrão então $-Z$ também é. De fato,

$$\begin{aligned} F_{-Z}(z) &= \mathcal{P}(-Z \leqslant z) \\ &= \mathcal{P}(Z \geqslant -z) \\ &= 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant -z) \\ &= 1 - F_Z(-z). \end{aligned}$$

Derivando ambos os lados temos $f_{-Z}(z) = f_Z(-z)$ e como uma v.a. normal padrão tem a função densidade par, $f_Z(-z) = f_Z(z)$.

a) $\mathcal{P}(Z > x) = \mathcal{P}(-Z < -x) = \mathcal{P}(Z < -x)$.

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(|Z|>x) &= 1-\mathcal{P}(|Z|<x)\\ &= 1-\mathcal{P}(-x<Z<x)\\ &= 1-\{\mathcal{P}(Z<x)-\mathcal{P}(Z<-x)\}\\ &= 1-\mathcal{P}(Z<x)+\mathcal{P}(Z<-x)\\ &= \mathcal{P}(Z>x)+\mathcal{P}(Z<-x)\\ &= 2\mathcal{P}(Z>x).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(|Z|<x) &= 1-\mathcal{P}(|Z|>x)\\ &= 1-2\mathcal{P}(Z>x)\\ &= 1-2(1-\mathcal{P}(Z<x))\\ &= 2\mathcal{P}(Z<x)-1.\end{aligned}$$

34. Uma vez que encontramos a distribuição de X na **Questão 19**, basta observar que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(\left(\frac{X-v}{\alpha}\right)^{\beta}\leqslant x\right) &= \mathcal{P}\left(\frac{X-v}{\alpha}\leqslant x^{1/\beta}\right)\\ &= \mathcal{P}\left(X\leqslant \alpha x^{1/\beta}+v\right)\\ &= 1-e^{-x}.\end{aligned}$$

35. Vamos representar os quantis citados pela sua representação simplificada q_1, q_2 e q_3 respectivamente. Considerando inicialmente a variável X, sabemos que $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$ para x positivo. Desse modo,

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(X<q_1)=0,25\\ \Longleftrightarrow\quad & 1-e^{-2q_1}=0,25\\ \Longleftrightarrow\quad & e^{-2q_1}=0,75\\ \Longleftrightarrow\quad & q_1=\frac{\ln(0,75)}{-2}\\ \Longleftrightarrow\quad & q_1\simeq 0,1438.\end{aligned}$$

Analogamente encontramos $q_2 \simeq 0,3466$ e $q_3 \simeq 0,6932$.

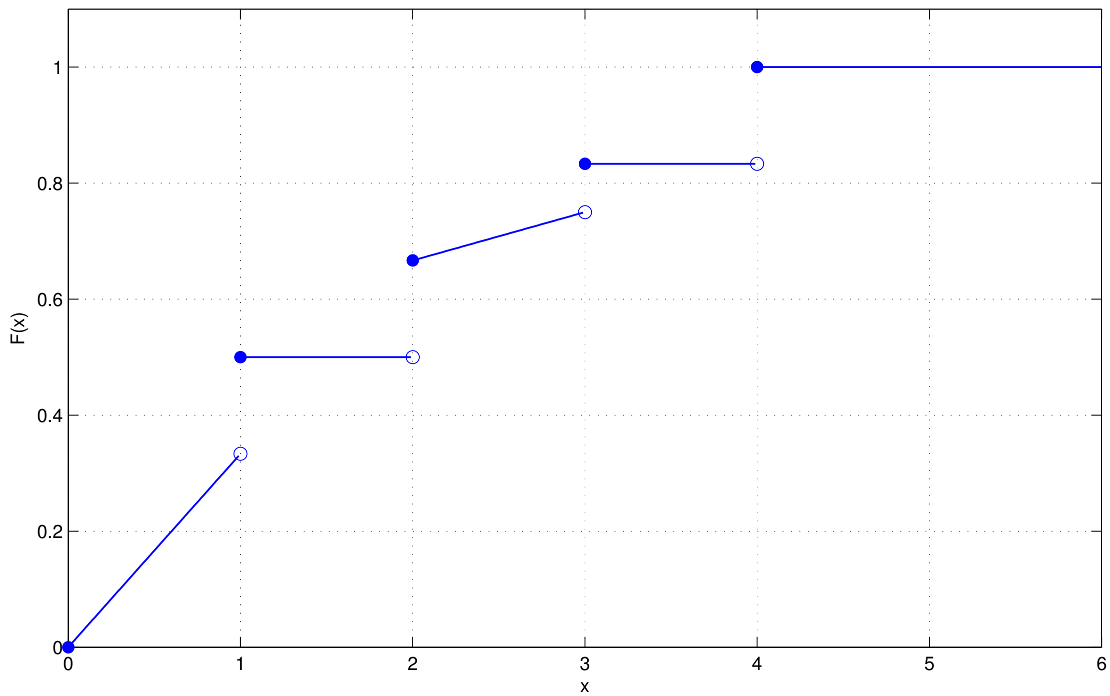
Considere agora a variável Y. Claramente a mediana é $q_2 = 4$. Para encontrar q_3 note que

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(Y < q_3) = 0,75 \\ \iff \quad & \mathcal{P}\left(\frac{Y-4}{\sqrt{9}} < \frac{q_3-4}{\sqrt{9}}\right) = 0,75 \\ \iff \quad & \mathcal{P}\left(Z < \frac{q_3-4}{3}\right) = 0,75. \end{aligned}$$

e olhando na tabela devemos ter $\frac{q_3-4}{3} = 0,68$, ou seja, $q_3 = 6,04$.

Para encontrar $q_1 = 1,96$, basta lembrar que q_1 e q_3 devem estar à mesma distância da mediana.

36. a) O gráfico tem a forma abaixo



b) Como a variável é contínua nesse ponto, a probabilidade desejada é 0.

c) $\mathcal{P}(X = 2) = F(2^+) - F(2^-) = 2/3 - 1/2 = 1/6$.

d) $P(2,2 < X < 3,7) = F(3,7) - F(2,2) = 5/6 - (2,2 + 6)/12 = 3/20$.