

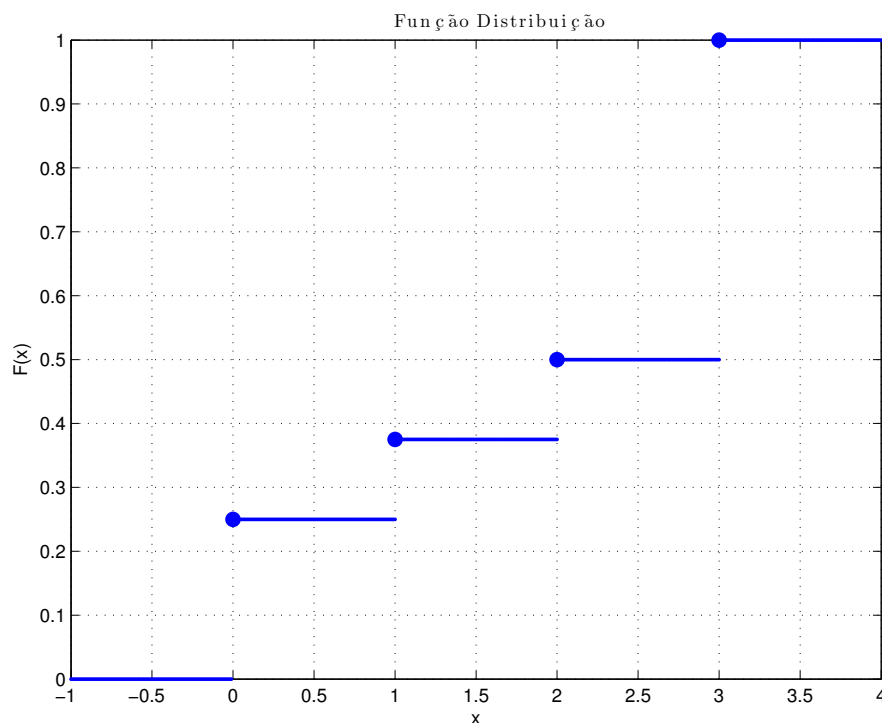
## 3ª Lista de PE – Solução

1. Se  $X$  representa o ganho do jogador, então os possíveis valores para  $X$  são  $-2, -1, 0, 2$  e  $4$ . Esses valores são, respectivamente, correspondentes a se retirar 2 bolas brancas, 1 branca e 1 laranja, 2 laranjas, 1 preta e 1 branca, 1 preta e 1 laranja e, por último, 2 bolas pretas.

Sendo o espaço amostral finito, é fácil concluir que  $n(\Omega) = \binom{14}{2}$ . As probabilidades associadas a esses valores são

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X = -2) &= \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{28}{91} & \mathcal{P}(X = 1) &= \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{32}{91} \\ \mathcal{P}(X = -1) &= \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{16}{91} & \mathcal{P}(X = 2) &= \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{8}{91} \\ \mathcal{P}(X = 0) &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{1}{91} & \mathcal{P}(X = 4) &= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{6}{91}\end{aligned}$$

2. a) Para construir o gráfico da função probabilidade de massa basta marcar os pontos  $(i, \mathcal{P}(X = i))$ ,  $i = 0, 1, 2$  e  $3$  no plano cartesiano. A função de distribuição acumulada segue abaixo:



b) Segue da definição de esperança que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X) &= 0\mathcal{P}(X = 0) + 1\mathcal{P}(X = 1) + 2\mathcal{P}(X = 2) + 3\mathcal{P}(X = 3) \\ &= 0(0,25) + 1(0,125) + 2(0,125) + 3(0,5) \\ &= 1,875.\end{aligned}$$

c) Primeiramente calculamos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X^2) &= 0^2\mathcal{P}(X = 0) + 1^2\mathcal{P}(X = 1) + 2^2\mathcal{P}(X = 2) + 3^2\mathcal{P}(X = 3) \\ &= 0^2(0,25) + 1^2(0,125) + 2^2(0,125) + 3^2(0,5) \\ &= 5,125.\end{aligned}$$

Em seguida, pela definição de variância temos

$$\text{Var}(X) = 5,125 - (1,875)^2 \approx 1,61.$$

d) Os resultados seguem abaixo:

Como não há valores entre 0 e 1,  $\mathcal{P}(0 < X < 1) = 0$ .

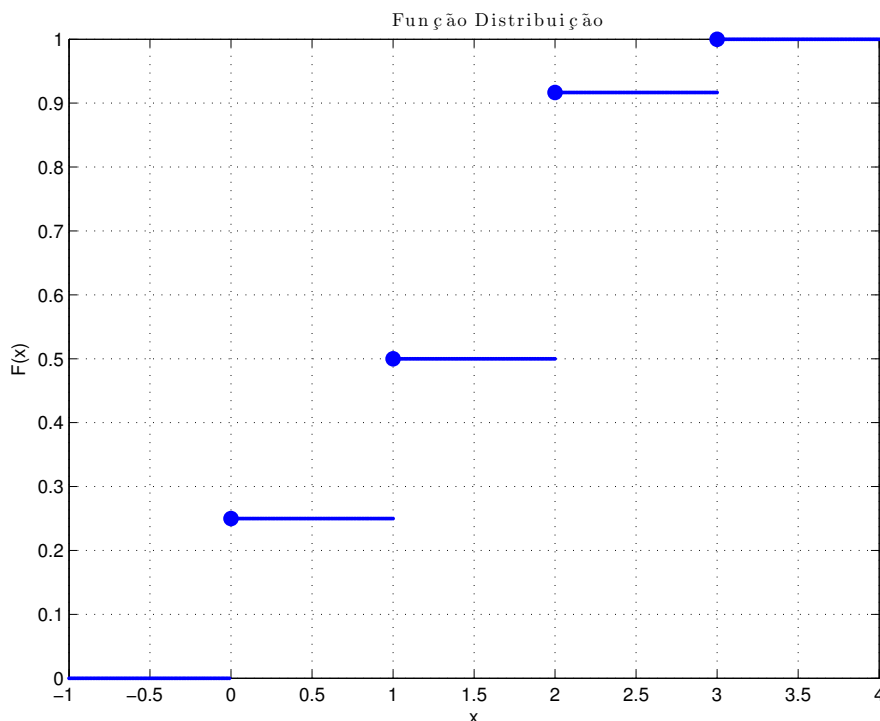
$\mathcal{P}(X \leq 2) = \mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) + \mathcal{P}(X = 2) = 0,25 + 0,125 + 0,125 = 0,5$ .

Como não há valores maiores que 3,  $\mathcal{P}(X > 3) = 0$ .

$\mathcal{P}(X > 2,5) = \mathcal{P}(X = 3) = 0,5$ .

3. Primeiramente, lembre-se que  $F(y^-)$  representa o limite à esquerda da função quando  $x \rightarrow y$ .

a) O gráfico tem a forma abaixo



b) Como o tamanho dos saltos em cada ponto representa o valor da probabilidade que aquele ponto “carrega”, temos

$$\mathcal{P}(X = 1) = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{P}(X = 2) = F(2) - F(2^-) = \frac{5}{12},$$

$$\mathcal{P}(X = 3) = F(3) - F(3^-) = \frac{1}{12}.$$

c)  $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

4. Das informações do texto temos que  $\mathcal{P}(X = 0) = 0,5$  e  $\mathcal{P}(X = i) = p^i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

a) Como sabemos a soma das probabilidades deve ser igual a um. Desse modo, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(X = i) = \frac{p}{1-p} = \frac{1}{2}.$$

Resolvendo a equação acima encontramos  $p = 1/3$ .

b) A probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}(X \leq 5) = \sum_{i=0}^5 \mathcal{P}(X = i) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^5 \frac{1}{3^i} = \frac{1}{162}.$$

c) A probabilidade desejada é calculada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(X = 2k) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} = \frac{5}{8}.$$

5. Diretamente da definição temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= -1\mathcal{P}(X = -1) + 0\mathcal{P}(X = 0) + 1\mathcal{P}(X = 1) \\ &= -1(0,2) + 0(0,5) + 1(0,3) \\ &= 0,1. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^2) &= (-1)^2\mathcal{P}(X = -1) + 0^2\mathcal{P}(X = 0) + 1^2\mathcal{P}(X = 1) \\ &= (-1)^2(0,2) + 0^2(0,5) + 1^2(0,3) \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

e então

$$\text{Var}(X) = 0,5 - (0,1)^2 = 0,49.$$

6. a) A função de distribuição acumulada da variável aleatória  $N$  é dada por

$$\mathcal{P}(N \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 0,2, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 0,5, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 0,85, & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 0,90, & \text{se } 3 \leq x < 4, \\ 0,95, & \text{se } 4 \leq x < 5, \\ 1, & \text{se } x \geq 5. \end{cases}$$

b) A probabilidade desejada é dada por

$$\mathcal{P}(X \geq 2) = 1 - \mathcal{P}(X < 2) = 1 - \mathcal{P}(X \leq 1) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

c) O valor esperado é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= 0\mathcal{P}(X=0) + 1\mathcal{P}(X=1) + 2\mathcal{P}(X=2) + 3\mathcal{P}(X=3) + 4\mathcal{P}(X=4) + 5\mathcal{P}(X=5) \\ &= 0(0,2) + 1(0,3) + 2(0,35) + 3(0,05) + 4(0,05) + 5(0,05) \\ &= 1,6. \end{aligned}$$

Para o cálculo da variância, primeiramente calculamos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^5 k^2 \mathcal{P}(X=k) \\ &= 0^2(0,2) + 1^2(0,3) + 2^2(0,35) + 3^2(0,05) + 4^2(0,05) + 5^2(0,05) \\ &= 4,2 \end{aligned}$$

e então

$$\text{Var}(X) = 4,2 - (1,6)^2 = 1,64.$$

7. a) Uma vez que a soma das probabilidades deve ser um, basta resolver a equação

$$k + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} + \frac{k}{7} = 1,$$

resultando em  $k = \frac{105}{176}$ .

b) A probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}(X < 5) = \frac{105}{176} + \frac{105}{176} = \frac{35}{44}.$$

8. Vamos denotar a probabilidade de sair coroa por  $p_c$  e a de sair cara por  $p_k$ . Do enunciado, temos que  $p_k = 4p_c$ . Como a soma das probabilidades deve ser um, temos que  $4p_c + p_c = 1$  de onde resulta que  $p_c = 1/5$  e  $p_k = 4/5$ . Como jogamos a moeda três vezes, a distribuição da variável  $X$  será dada por

$$\binom{3}{k} p_k^k p_c^{(3-k)} = \binom{3}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{(3-k)}.$$

A distribuição acumulada é dada por

$$\mathcal{P}(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathcal{P}(X = k).$$

Onde  $\lfloor x \rfloor$  representa o maior inteiro menor ou igual a  $x$ .

9. Sendo  $X$  a variável que representa a soma dos dados, facilmente chegamos às probabilidades

$$\mathcal{P}(X = 2) = \mathcal{P}(X = 12) = 1/36$$

$$\mathcal{P}(X = 3) = \mathcal{P}(X = 11) = 2/36$$

$$\mathcal{P}(X = 4) = \mathcal{P}(X = 10) = 3/36$$

$$\mathcal{P}(X = 5) = \mathcal{P}(X = 9) = 4/36$$

$$\mathcal{P}(X = 6) = \mathcal{P}(X = 8) = 5/36$$

$$\mathcal{P}(X = 7) = 6/36.$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= 2\mathcal{P}(X = 2) + 3\mathcal{P}(X = 3) + \dots + 11\mathcal{P}(X = 11) + 12\mathcal{P}(X = 12) \\ &= 7. \end{aligned}$$

10. a) O valor esperado é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= 2\mathcal{P}(X = 2) + 3\mathcal{P}(X = 3) + 4\mathcal{P}(X = 4) + 5\mathcal{P}(X = 5) + 6\mathcal{P}(X = 6) + 7\mathcal{P}(X = 7) \\ &= 2(0,1) + 3(0,1) + 4(0,3) + 5(0,2) + 6(0,2) + 7(0,1) \\ &= 4,6. \end{aligned}$$

- b) Para o cálculo da variância, primeiramente calculamos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^2) &= \sum_{k=2}^7 k^2 \mathcal{P}(X = k) \\ &= 2^2(0,1) + 3^2(0,1) + 4^2(0,3) + 5^2(0,2) + 6^2(0,2) + 7^2(0,1) \\ &= 23,2. \end{aligned}$$

e então

$$\text{Var}(X) = 23,2 - (4,6)^2 = 2,04.$$

- c) Seja  $Y$  a variável aleatória que representa o valor ganho por um operário. Na tabela abaixo estão computados os valores ganho pelo operário de acordo com o tempo gasto no processamento de uma peça:

tempo gasto	2	3	4	5	6	7
valor ganho	4	3,5	3	2,5	2	2

Como  $Y$  é uma transformação da variável  $X$  as probabilidades correspondentes são idênticas, de modo que as probabilidades associadas à variável  $Y$  são:

$k$	4	3,5	3	2,5	2
$\mathcal{P}(Y = k)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3

Segue que o valor esperado da variável  $Y$  é

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(Y) &= 4\mathcal{P}(X = 4) + 3,5\mathcal{P}(X = 3,5) + 3\mathcal{P}(X = 3) + 2,5\mathcal{P}(X = 2,5) + 2\mathcal{P}(X = 2) \\ &= 4(0,1) + 3,5(0,1) + 3(0,3) + 2,5(0,2) + 2(0,3) \\ &= 2,75.\end{aligned}$$

11. Do enunciado temos que  $\mathcal{P}(X = k) = (0,5)^k$ , para  $k = 1, 2, \dots$

$$\text{a) } \mathcal{P}(X < 10) = \sum_{k=1}^9 \mathcal{P}(X = k) = \frac{511}{512}.$$

$$\text{b) } \mathcal{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k\mathcal{P}(X = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^k} = 2.$$

$$\text{c) } 30 \times \mathcal{E}(X) \times 50 = 3000.$$

12. Se considerarmos o dado honesto e representarmos por  $X$  a variável referente ao ganho ou perda do jogador, claramente  $X \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{6})$  e

$$\mathcal{P}(X = -1) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$\mathcal{P}(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$\mathcal{P}(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$\mathcal{P}(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}.$$

A esperança da variável  $X$  é

$$\mathcal{E}(X) = -1 \left(\frac{125}{216}\right) + 1 \left(\frac{75}{216}\right) + 2 \left(\frac{15}{216}\right) + 3 \left(\frac{1}{216}\right) = \frac{-17}{216}$$

e concluímos que o jogo não é justo para o jogador.

13. Vamos considerar que  $X$  é a variável relativa ao número de jogos realizados. Considere agora os eventos  $G_i = \text{“Equipe A ganha o } i\text{-ésimo jogo”}$ ,  $i \geq 1$ .

a) Quando  $i = 2$  a v.a.  $X$  pode assumir os valores 2 ou 3. Agora, como os eventos  $G_i$ 's são independentes temos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X = 2) &= \mathcal{P}(\{G_1 \cap G_2\} \cup \{G_1^c \cap G_2^c\}) \\ &= \mathcal{P}(G_1 \cap G_2) + \mathcal{P}(G_1^c \cap G_2^c) \\ &= \mathcal{P}(G_1)\mathcal{P}(G_2) + \mathcal{P}(G_1^c)\mathcal{P}(G_2^c) \\ &= p^2 + (1-p)^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X = 3) &= \mathcal{P}(\{G_1 \cap G_2^c \cap G_3\} \cup \{G_1^c \cap G_2 \cap G_3\} \cup \{G_1^c \cap G_2 \cap G_3^c\} \cup \{G_1 \cap G_2^c \cap G_3^c\}) \\ &= \mathcal{P}(G_1 \cap G_2^c \cap G_3) + \mathcal{P}(G_1^c \cap G_2 \cap G_3) + \mathcal{P}(G_1^c \cap G_2 \cap G_3^c) + \mathcal{P}(G_1 \cap G_2^c \cap G_3^c) \\ &= \mathcal{P}(G_1)\mathcal{P}(G_2^c)\mathcal{P}(G_3) + \mathcal{P}(G_1^c)\mathcal{P}(G_2)\mathcal{P}(G_3) + \mathcal{P}(G_1^c)\mathcal{P}(G_2)\mathcal{P}(G_3^c) + \mathcal{P}(G_1)\mathcal{P}(G_2^c)\mathcal{P}(G_3^c) \\ &= p(1-p)^2 + p(1-p)^2 + p^2(1-p) + p^2(1-p) \\ &= 2p(1-p)\end{aligned}$$

Segue que

$$\mathcal{E}(X) = 2\mathcal{P}(X = 2) + 3\mathcal{P}(X = 3) = 2[p^2 + (1-p)^2] + 3[2p(1-p)] = 2 + 2p(1-p).$$

- b) Quando  $i = 3$  a v.a.  $X$  pode assumir os valores 3, 4 ou 5. Por argumentos análogos ao do item anterior chegamos às probabilidades

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X = 3) &= p^3 + (1-p)^3, \\ \mathcal{P}(X = 4) &= 3p^3(1-p) + 3p(1-p)^3, \\ \mathcal{P}(X = 5) &= 3(1-p)^2p^3 + 3(1-p)^3p^2 = 6p^2(1-p)^2.\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X) &= 3\mathcal{P}(X = 3) + 4\mathcal{P}(X = 4) + 5\mathcal{P}(X = 5) \\ &= 3[p^3 + (1-p)^3] + 4[3p^3(1-p) + 3p(1-p)^3] + 5[6p^2(1-p)^2] \\ &= 6p^4 - 12p^3 + 3p^2 + 3p + 3.\end{aligned}$$

- c) Primeiramente, façamos  $\mathcal{E}(X) = f(p)$  para o **item a)** e  $\mathcal{E}(X) = g(p)$  para o **item b)**. Como queremos maximizar a esperança, derivamos as funções  $f(p)$  e  $g(p)$  no intervalo  $0 < p < 1$ .

$$f'(p) = 2 - 4p \quad \text{e} \quad g'(p) = 24p^3 - 26p^2 + 6p + 3$$

e, portanto,  $p = 1/2$  é ponto crítico de ambas as funções. Para confirmar que  $p = 1/2$  é, de fato, um ponto de máximo basta observar que, nesse ponto, as funções

$$f'(p) = -4 \quad \text{e} \quad g'(p) = 72p^2 - 72p + 6$$

são negativas.

14. Vamos considerar que  $X$  é a variável que dá o valor da pontuação obtida pelo meteorologista. Então  $\mathcal{P}(X = 1 - (1-p)^2) = p^*$  e  $\mathcal{P}(X = 1 - p^2) = 1 - p^*$ . Segue que

$$\mathcal{E}(X) = p^*(1 - (1-p^2)) + (1-p^*)(1-p^2) = f(p).$$

Como queremos maximizar a esperança derivamos a função  $f(p)$  no intervalo  $0 < p < 1$ .

$$f'(p) = 2p^*(1-p) - 2p(1-p^*) = 0 \Leftrightarrow p = p^*$$

obtendo  $p^*$  como ponto crítico. Para confirmar que  $p^*$  é, de fato, um ponto de máximo basta observar que  $f''(p^*) = -2$ .

15. Vamos denotar por  $X$  a variável que representa o número de motores funcionando em um avião de 5 motores e  $Y$  a variável que representa o número de motores funcionando em um avião de 3 motores. Estamos interessados nos valores de  $p$  para o qual

$$\mathcal{P}(X \geq 3) \geq \mathcal{P}(Y \geq 2).$$

Como  $p$  representa a probabilidade de sucesso (o motor funciona) a desigualdade acima ocorre e

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5 \geq \binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3 \\ \Leftrightarrow & 6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 6(p - 1/2)(p - 1)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & p \geq 1/2. \end{aligned}$$

16. a)  $\mathcal{P}(X = k) = \binom{25}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{25-k}, k = 0, 1, \dots, 25.$

b) As probabilidades são

$$\mathcal{P}(X \leq 1) = \mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) \approx 0,0274,$$

$$\mathcal{P}(X < 1) = \mathcal{P}(X = 0) \approx 0,0038,$$

$$\mathcal{P}(X \geq 1) = 1 - \mathcal{P}(X < 1) \approx 0,9962,$$

$$\mathcal{P}(X > 1) = 1 - \mathcal{P}(X \leq 1) \approx 0,9726,$$

$$\mathcal{P}(\{2 \leq X \leq 4\}) = \mathcal{P}(X = 2) + \mathcal{P}(X = 3) + \mathcal{P}(X = 4) \approx 0,3933,$$

$$\mathcal{P}(\{2 \leq X < 4\}) = \mathcal{P}(X = 2) + \mathcal{P}(X = 3) \approx 0,2066,$$

$$\mathcal{P}(\{2 < X \leq 4\}) = \mathcal{P}(X = 3) + \mathcal{P}(X = 4) \approx 0,3225,$$

$$\mathcal{P}(\{2 < X < 4\}) = \mathcal{P}(X = 3) \approx 0,1358.$$

c) A aleatoriedade das respostas.

17. Seja  $X$  a variável que representa o número de assegurados sobreviventes. A probabilidade associada à variável  $X$  é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{20}{k} (0,9)^k (0,1)^{20-k}, k = 0, 1, \dots, 20.$$

a)  $\mathcal{P}(X = 20) \approx 0,1216.$

b)  $\mathcal{P}(X = 0) \approx 0.$

c)  $\mathcal{P}(X \geq 5) \approx 1.$

d)  $\mathcal{P}(X \geq 15) \approx 0,9888.$

e)  $\mathcal{P}(X = 17) \approx 0,1901.$

f)  $\mathcal{P}(X \geq 18) \approx 0,6769.$

g)  $\mathcal{P}(X \leq 15) \approx 0,0432.$



h)  $\mathcal{E}(X) = 20 \times 0,9 = 18$  e  $\text{Var}(X) = 20 \times 0,9 \times 0,1 = 1,8$ .

i) Seja  $Y$  a variável referente ao número de mortos no período dado.  $\mathcal{E}(Y) = 20 \times 0,1 = 2$  e  $\text{Var}(Y) = 20 \times 0,1 \times 0,9 = 1,8$ .

18. Seja  $X$  a variável que representa o número de pacientes curados. A probabilidade associada à variável  $X$  é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{15}{k} (0,8)^k (0,2)^{15-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 15.$$

a)  $\mathcal{P}(X = 15) \approx 0,0352$ .

b)  $\mathcal{P}(X \leq 13) \approx 0,8329$ .

c)  $\mathcal{P}(X \geq 10) \approx 0,9389$ .

19. Seja  $X$  a variável que representa o número de bactérias em  $5\text{cm}^3$ . Como a taxa média em  $1\text{cm}^3$  é de 0,8; em  $5\text{cm}^3$  será de 4. Desse modo, a variável  $X$  é uma Poisson de parâmetro 4 cuja distribuição é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \frac{4^k}{k!} e^{-4}, \quad k = 0, 1, \dots$$

a)  $\mathcal{P}(X \geq 2) \approx 0,9084$ .

b)  $\mathcal{P}(X \geq 13) \approx 0,0003$ .

c)  $\mathcal{P}(X = 0) \approx 0,0183$ .

b)  $\mathcal{P}(X \leq 7) \approx 0,9489$ .

20. Seja  $X$  a variável que representa o número de suicídios. A probabilidade associada à variável  $X$  é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{500.000}{k} \left(\frac{1}{250.000}\right)^k \left(\frac{249.999}{250.000}\right)^{500.000-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 500.000.$$

a)  $\mathcal{P}(X \geq 6) \approx 0,0166$ .

b) Sim, bastaria mudar os parâmetros de acordo com os dados relativos à dengue.

21. Seja  $X$  a variável relativa ao número de peças defeituosas. A probabilidade associada à variável  $X$  é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{3}{12}\right)^k \left(\frac{9}{12}\right)^{4-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 4.$$

a)  $\mathcal{P}(X \geq 2) \approx 0,2617$ .

b)  $\mathcal{P}(X \leq 1) \approx 0,7383$ .

c)  $\mathcal{P}(X \leq 3) \approx 0,9961$ .

22. Seja  $X$  a variável relativa ao número de bolas brancas retiradas.

a) Nesse caso  $X$  tem distribuição hipergeométrica. Como escolhemos 3 entre as 10 bolas brancas e 2 entre as bolas vermelhas, segue que

$$\mathcal{P}(X = 3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{20}{2}}{\binom{30}{5}} \approx 0,1599.$$

- b) Nesse caso  $X$  tem distribuição binomial de parâmetros  $n = 5$  e  $p = 1/3$ . Segue que

$$\mathcal{P}(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0,1646.$$

23. a) Seja  $X \sim \text{Bin}(4/10,10)$  a variável responsável pelos 10 lançamentos da moeda 1 e  $Y \sim \text{Bin}(7/10,10)$  a variável responsável pelos 10 lançamentos da moeda 2. Como cada moeda pode ser selecionada com 50% de chances, a probabilidade desejada é

$$\frac{1}{2}\mathcal{P}(X = 7) + \frac{1}{2}\mathcal{P}(Y = 7) = \frac{1}{2}\binom{10}{7}(0,4)^7(0,6)^3 + \frac{1}{2}\binom{10}{7}(0,7)^7(0,3)^3.$$

- b) Se  $A$  representa o evento em que temos 7 caras em 10 lançamentos e  $B$  representa o evento em que o primeiro lançamento resulta em cara, a probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}.$$

Para calcular  $\mathcal{P}(A \cap B)$  basta observar que, sendo o primeiro lançamento cara, nos resta escolher 6 possíveis caras dentre 9 lançamentos restantes. Se  $X \sim \text{Bin}(4/10,9)$  é a variável responsável pelos 9 lançamentos da moeda 1 e  $Y \sim \text{Bin}(7/10,9)$  a variável responsável pelos 9 lançamentos da moeda 2, temos que

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(X = 6) + \frac{1}{2}\mathcal{P}(Y = 6) = \frac{1}{2}\binom{9}{6}(0,4)^6(0,6)^3 + \frac{1}{2}\binom{9}{6}(0,7)^6(0,3)^3.$$

Agora, para calcular  $\mathcal{P}(B)$ , basta representarmos o primeiro lançamento da moeda 1 por  $W \sim \text{Ber}(0,4)$  e o primeiro lançamento da moeda 2 por  $Z \sim \text{Ber}(0,7)$  e

$$\mathcal{P}(B) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(W = 1) + \frac{1}{2}\mathcal{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}(0,4) + \frac{1}{2}(0,7).$$

24. Se  $A$  representa o evento em que uma pessoa tem 2 resfriados no ano e  $B$  representa o evento em que a droga é benéfica, a probabilidade que procuramos é

$$\mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A|B^c)\mathcal{P}(B^c)}.$$

Sejam  $X \sim \text{Pois}(5)$  e  $Y \sim \text{Pois}(3)$ , então

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A|B^c)\mathcal{P}(B^c)} &= \frac{\mathcal{P}(Y = 2)(0,75)}{\mathcal{P}(Y = 2)(0,75) + \mathcal{P}(X = 2)(0,25)} \\ &= \frac{\frac{3^2}{2!}e^{-3}(0,75)}{\frac{3^2}{2!}e^{-3}(0,75) + \frac{5^2}{2!}e^{-5}(0,25)}. \end{aligned}$$

25. Do enunciado temos que  $Y \sim \text{Pois}(2)$ .

- a)  $\mathcal{P}(Y < 2) = \mathcal{P}(Y = 0) + \mathcal{P}(Y = 1) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} \approx 0,4060$ .  
b)  $\mathcal{P}(2 \leq Y < 4) = \mathcal{P}(Y = 2) + \mathcal{P}(Y = 3) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx 0,4511$ .  
c)  $\mathcal{P}(Y > 0) = 1 - \mathcal{P}(Y = 0) = 1 - e^{-2} \approx 0,1353$ .  
d)  $\mathcal{P}(Y = 1|Y < 3) = \frac{\mathcal{P}(\{Y=1\} \cap \{Y < 3\})}{\mathcal{P}(Y < 3)} = \frac{\mathcal{P}(Y=1)}{\mathcal{P}(Y < 3)} = \frac{2e^{-2}}{3e^{-2} + \frac{4}{3}e^{-2}} = 0,4$ .

26. Seja  $X$  a variável correspondente ao número de defeitos. Do enunciado temos que  $X \sim \text{Pois}(1)$ .

- a)  $\mathcal{P}(X \geq 1) \approx 0,6321$ .
- b)  $\mathcal{P}(X \leq 2) \approx 0,9197$ .
- c)  $\mathcal{P}(2 \leq X \leq 4) \approx 0,2606$ .
- d)  $\mathcal{P}(X \leq 1) \approx 0,7358$ .

27. Do enunciado temos que  $X \sim \text{Pois}(2)$ .

- a)  $\mathcal{P}(X > 3) \approx 0,1429$ .
- b) Queremos encontrar  $k$  tal que  $\mathcal{P}(X \leq k) \geq 0,90$ . Por tentativa e erro encontramos  $k = 4$ . Concluimos que as instalações deveriam atender no máximo quatro petroleiros por dia.
- c)  $\mathcal{P}(X = 5) \approx 0,0361$ .
- d) Caso  $X \geq 3$  atende-se apenas três petroleiros, desse modo temos

$$\mathcal{E}(X) = 0\mathcal{P}(X = 0) + 1\mathcal{P}(X = 1) + 2\mathcal{P}(X = 2) + 3\mathcal{P}(X \geq 3) \approx 1,7819.$$

28. Do enunciado temos que  $X \sim \text{Pois}(10)$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X = k) &= \mathcal{P}(X = k + 1) \iff \\ \frac{10^k}{k!} e^{-10} &= \frac{10^{k+1}}{(k+1)!} e^{-10} \iff \\ \frac{(k+1)!}{k!} &= \frac{10^{k+1}}{10^k} \iff \\ k+1 &= 10 \iff \\ k &= 9. \end{aligned}$$

29. Seja  $X$  a variável correspondente ao número de itens defeituosos, desse modo sabemos que  $X \sim \text{Bin}(10; 0,2)$ . A probabilidade de que tenhamos no máximo um item defeituoso é

$$\mathcal{P}(X \leq 1) = \binom{10}{0} 0,2^0 \times 0,8^{10} + \binom{10}{1} 0,2^1 \times 0,8^9 \approx 0,3758.$$

Podemos, também, aproximar esta probabilidade por meio de uma Poisson de parâmetro  $\lambda = 10 \times 0,2 = 2$ . Segue que

$$\mathcal{P}(X \leq 1) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} \approx 0,4060.$$

30. Seja  $X$  a variável referente ao o número de chamadas que chegam por minuto. Segue que  $X \sim \text{Pois}(8)$ .

- a)  $\mathcal{P}(X \geq 10) \approx 0,2834$ .
- b)  $\mathcal{P}(X < 9) \approx 0,5926$ .
- c)  $\mathcal{P}(7 \leq X < 9) \approx 0,2792$ .

31. Primeiramente seja  $X \sim \text{Pois}(3)$ .

a) A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathcal{P}(X < 3) \\ &= 1 - \{\mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) + \mathcal{P}(X = 2)\} \\ &= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \frac{3^2}{2}e^{-3} \\ &= 1 - \frac{17}{2}e^{-3}.\end{aligned}$$

b) A probabilidade condicional é

$$\mathcal{P}(X \geq 3 | X \geq 1) = \frac{\mathcal{P}(\{X \geq 3\} \cap \{X \geq 1\})}{\mathcal{P}(X \geq 1)} = \frac{\mathcal{P}(X \geq 3)}{\mathcal{P}(X \geq 1)} = \frac{1 - \frac{17}{2}e^{-3}}{1 - e^{-3}}.$$

32. Usando as propriedades de esperança e variância temos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(Y) &= \mathcal{E}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathcal{E}(X - \mu) \\ &= \frac{1}{\sigma}\{\mathcal{E}(X) - \mu\} = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) \\ &= 0.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\text{Var}(X - \mu) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\text{Var}(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Podemos lembrar da **Questão 9** da **1ª Lista** que os dados, quando padronizados, tem média zero e variância 1. Como era de se esperar, a média de uma variável aleatória padronizada é zero e a sua variância é 1.

33. A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X = n + k | X > n) &= \frac{\mathcal{P}(\{X = n + k\} \cap \{X > n\})}{\mathcal{P}(X > n)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(X = n + k)}{\mathcal{P}(X > n)} \\ &= \frac{p(1 - p)^{n+k-1}}{(1 - p)^n} \\ &= p(1 - p)^{k-1}.\end{aligned}$$

Se os primeiros  $n$  ensaios falham, então é como se estivéssemos recomeçando o experimento a partir do  $n$ -ésimo ensaio.