Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

3ª Lista de PE – Solução

1. Se X representa o ganho do jogador, então os possíveis valores para X são $-2, -1, 0, 2$ e 4. Esses valores são, respectivamente, correspondentes a se retirar 2 bolas brancas, 1 branca e 1 laranja, 2 laranjas, 1 preta e 1 branca, 1 preta e 1 laranja e, por último, 2 bolas pretas.

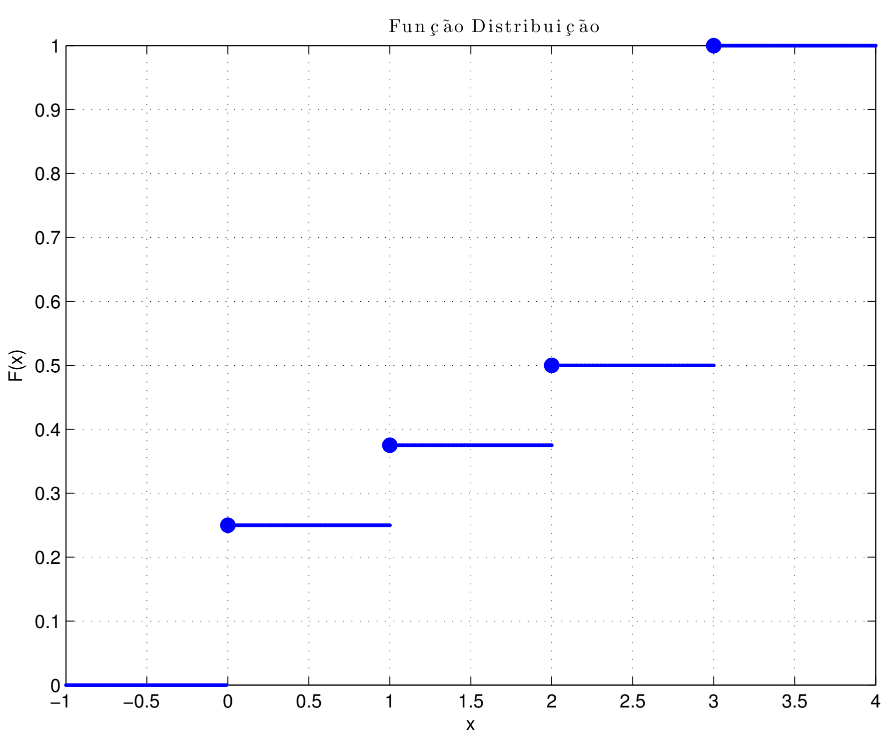
   Sendo o espaço amostral finito, é fácil concluir que $n(\Omega) = \binom{14}{2}$. As probabilidades associadas a esses valores são

$$\mathcal{P}(X=-2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{28}{91} \qquad \mathcal{P}(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{32}{91}$$

$$\mathcal{P}(X=-1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{16}{91} \qquad \mathcal{P}(X=2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{8}{91}$$

$$\mathcal{P}(X=0) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{1}{91} \qquad \mathcal{P}(X=4) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{6}{91}$$

2. a) Para construir o gráfico da função probabilidade de massa basta marcar os pontos $(i, \mathcal{P}(X=i)), i = 0, 1, 2$ e 3 no plano cartesiano. A função de distribuição acumulada segue abaixo:



b) Segue da definição de esperança que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X) &= 0\mathcal{P}(X=0)+1\mathcal{P}(X=1)+2\mathcal{P}(X=2)+3\mathcal{P}(X=3)\\ &= 0(0,25)+1(0,125)+2(0,125)+3(0,5)\\ &= 1,875.\end{aligned}$$

c) Primeiramente calculamos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(X^2\right) &= 0^2\mathcal{P}(X=0)+1^2\mathcal{P}(X=1)+2^2\mathcal{P}(X=2)+3^2\mathcal{P}(X=3)\\ &= 0^2(0,25)+1^2(0,125)+2^2(0,125)+3^2(0,5)\\ &= 5,125.\end{aligned}$$

Em seguida, pela definição de variância temos

$$\text{Var}(X) = 5,125-(1,875)^2 \approx 1,61.$$

d) Os resultados seguem abaixo:

Como não há valores entre 0 e 1, $\mathcal{P}(0 < X < 1) = 0$.

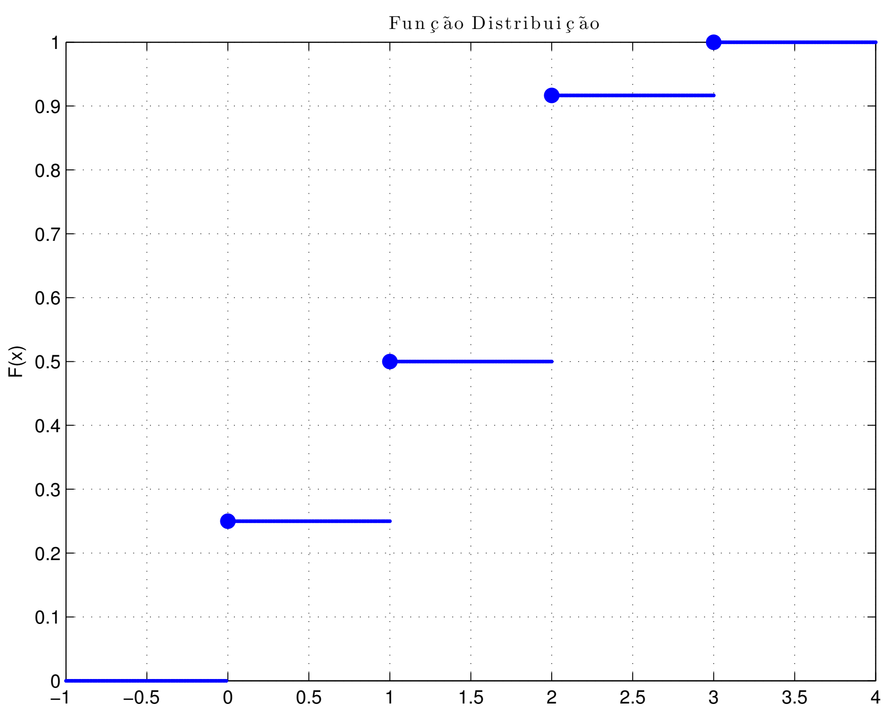
$\mathcal{P}(X \leqslant 2) = \mathcal{P}(X=0)+\mathcal{P}(X=1)+\mathcal{P}(X=2) = 0,25+0,125+0,125 = 0,5$.

Como não há valores maiores que 3, $\mathcal{P}(X > 3) = 0$.

$\mathcal{P}(X > 2,5) = \mathcal{P}(X=3) = 0,5$.

3. Primeiramente, lembre-se que $F(y^-)$ representa o limite à esquerda da função quando $x \to y$.

a) O gráfico tem a forma abaixo



b) Como o tamanho dos saltos em cada ponto representa o valor da probabilidade que aquele ponto "carrega", temos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=1) &= F(1)-F(1^-) = \frac{1}{4},\\ \mathcal{P}(X=2) &= F(2)-F(2^-) = \frac{5}{12},\\ \mathcal{P}(X=3) &= F(3)-F(3^-) = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

c) $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

4. Das informações do texto temos que $\mathcal{P}(X=0)=0,5$ e $\mathcal{P}(X=i)=p^i$, $i=1,2,3,\ldots$

a) Como sabemos a soma das probabilidades deve ser igual a um. Desse modo, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}(X=i) = \frac{p}{1-p} = \frac{1}{2}.$$

Resolvendo a equação acima encontramos $p=1/3$.

b) A probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}(X\leqslant 5) = \sum_{i=0}^{5}\mathcal{P}(X=i) = \frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{3^i} = \frac{1}{162}.$$

c) A probabilidade desejada é calculada por

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}(X=2k) = \frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}} = \frac{5}{8}.$$

5. Diretamente da definição temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X) &= -1\mathcal{P}(X=-1)+0\mathcal{P}(X=0)+1\mathcal{P}(X=1)\\ &= -1(0,2)+0(0,5)+1(0,3)\\ &= 0,1.\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(X^2\right) &= (-1)^2\mathcal{P}(X=-1)+0^2\mathcal{P}(X=0)+1^2\mathcal{P}(X=1)\\ &= (-1)^2(0,2)+0^2(0,5)+1^2(0,3)\\ &= 0,5\end{aligned}$$

e então

$$\mathrm{Var}(X) = 0,5-(0,1)^2 = 0,49.$$

6. a) A função de distribuição acumulada da variável aleatória N é dada por

$$\mathcal{P}(N \leqslant x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0, \\ 0,2, & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 0,5, & \text{se} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ 0,85, & \text{se} \quad 2 \leqslant x < 3, \\ 0,90, & \text{se} \quad 3 \leqslant x < 4, \\ 0,95, & \text{se} \quad 4 \leqslant x < 5, \\ 1, & \text{se} \quad x \geqslant 5. \end{cases}$$

b) A probabilidade desejada é dada por

$$\mathcal{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathcal{P}(X < 2) = 1 - \mathcal{P}(X \leqslant 1) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

c) O valor esperado é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= 0\mathcal{P}(X=0) + 1\mathcal{P}(X=1) + 2\mathcal{P}(X=2) + 3\mathcal{P}(X=3) + 4\mathcal{P}(X=4) + 5\mathcal{P}(X=5) \\ &= 0(0,2) + 1(0,3) + 2(0,35) + 3(0,05) + 4(0,05) + 5(0,05) \\ &= 1,6. \end{aligned}$$

Para o cálculo da variância, primeiramente calculamos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{5} k^2 \mathcal{P}(X=k) \\ &= 0^2(0,2) + 1^2(0,3) + 2^2(0,35) + 3^2(0,05) + 4^2(0,05) + 5^2(0,05) \\ &= 4,2 \end{aligned}$$

e então

$$\text{Var}(X) = 4,2 - (1,6)^2 = 1,64.$$

7. a) Uma vez que a soma das probabilidades deve ser um, basta resolver a equação

$$k + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} + \frac{k}{7} = 1,$$

resultando em $k = \frac{105}{176}$.

b) A probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}(X < 5) = \frac{105}{176} + \frac{\frac{105}{176}}{3} = \frac{35}{44}.$$

8. Vamos denotar a probabilidade de sair coroa por p_c e a de sair cara por p_k. Do enunciado, temos que $p_k = 4p_c$. Como a soma das probabilidades deve ser um, temos que $4p_c + p_c = 1$ de onde resulta que $p_c = 1/5$ e $p_k = 4/5$. Como jogamos a moeda três vezes, a distribuição da variável X será dada por

$$\binom{3}{k} p_k^k p_c^{(3-k)} = \binom{3}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{(3-k)}.$$

A distribuição acumulada é dada por

$$\mathcal{P}(X \leqslant x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathcal{P}(X = k).$$

Onde $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a x.

9. Sendo X a variável que representa a soma dos dados, facilmente chegamos às probabilidades

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X=2) &= \mathcal{P}(X=12) = 1/36 \\
\mathcal{P}(X=3) &= \mathcal{P}(X=11) = 2/36 \\
\mathcal{P}(X=4) &= \mathcal{P}(X=10) = 3/36 \\
\mathcal{P}(X=5) &= \mathcal{P}(X=9) = 4/36 \\
\mathcal{P}(X=6) &= \mathcal{P}(X=8) = 5/36 \\
\mathcal{P}(X=7) &= 6/36.
\end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= 2\mathcal{P}(X=2) + 3\mathcal{P}(X=3) + \cdots + 11\mathcal{P}(X=11) + 12\mathcal{P}(X=12) \\
&= 7.
\end{aligned}$$

10. a) O valor esperado é

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= 2\mathcal{P}(X=2) + 3\mathcal{P}(X=3) + 4\mathcal{P}(X=4) + 5\mathcal{P}(X=5) + 6\mathcal{P}(X=6) + 7\mathcal{P}(X=7) \\
&= 2(0,1) + 3(0,1) + 4(0,3) + 5(0,2) + 6(0,2) + 7(0,1) \\
&= 4,6.
\end{aligned}$$

b) Para o cálculo da variância, primeiramente calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=2}^{7} k^2 \mathcal{P}(X=k) \\
&= 2^2(0,1) + 3^2(0,1) + 4^2(0,3) + 5^2(0,2) + 6^2(0,2) + 7^2(0,1) \\
&= 23,2.
\end{aligned}$$

e então

$$\mathrm{Var}(X) = 23,2 - (4,6)^2 = 2,04.$$

c) Seja Y a variável aleatória que representa o valor ganho por um operário. Na tabela abaixo estão computados os valores ganho pelo operário de acordo com o tempo gasto no processamento de uma peça:

tempo gasto	2	3	4	5	6	7
valor ganho	4	3,5	3	2,5	2	2

Como Y é uma transformação da variável X as probabilidades correspondentes são identicas, de modo que as probabilidades associadas à variável Y são:

k	4	$3,5$	3	$2,5$	2
$\mathcal{P}(Y=k)$	$0,1$	$0,1$	$0,3$	$0,2$	$0,3$

Segue que o valor esperado da variável Y é

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(Y) &= 4\mathcal{P}(X=4) + 3,5\mathcal{P}(X=3,5) + 3\mathcal{P}(X=3) + 2,5\mathcal{P}(X=2,5) + 2\mathcal{P}(X=2)\\ &= 4(0,1) + 3,3(0,1) + 3(0,3) + 2,5(0,2) + 2(0,3)\\ &= 2,75.\end{aligned}$$

11. Do enunciado temos que $\mathcal{P}(X=k) = (0,5)^k$, para $k = 1, 2, \ldots$

 a) $\mathcal{P}(X < 10) = \sum_{k=1}^{9} \mathcal{P}(X=k) = \frac{511}{512}$.

 b) $\mathcal{E}(X) = \sum_{k\geqslant 1} k\mathcal{P}(X=k) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{k}{2^k} = 2$.

 c) $30 \times \mathcal{E}(X) \times 50 = 3000$.

12. Se considerarmos o dado honesto e representarmos por X a variável referente ao ganho ou perda do jogador, claramente $X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{1}{6}\right)$ e

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=-1) &= \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}\\ \mathcal{P}(X=1) &= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}\\ \mathcal{P}(X=2) &= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}\\ \mathcal{P}(X=3) &= \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}.\end{aligned}$$

A esperança da variável X é

$$\mathcal{E}(X) = -1\left(\frac{125}{216}\right) + 1\left(\frac{75}{216}\right) + 2\left(\frac{15}{216}\right) + 3\left(\frac{1}{216}\right) = \frac{-17}{216}$$

e concluímos que o jogo não é justo para o jogador.

13. Vamos considerar que X é a variável relativa ao número de jogos realizados. Considere agora os eventos $G_i =$ *"Equipe A ganha o i-ésimo jogo"*, $i \geqslant 1$.

 a) Quando $i = 2$ a v.a. X pode assumir os valores 2 ou 3. Agora, como os eventos G_i's são independentes temos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=2) &= \mathcal{P}(\{G_1 \cap G_2\} \cup \{G_1^c \cap G_2^c\})\\ &= \mathcal{P}(G_1 \cap G_2) + \mathcal{P}(G_1^c \cap G_2^c)\\ &= \mathcal{P}(G_1)\mathcal{P}(G_2) + \mathcal{P}(G_1^c)\mathcal{P}(G_2^c)\\ &= p^2 + (1-p)^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X=3) &= \mathcal{P}(\{G_1 \cap G_2^c \cap G_3\} \cup \{G_1^c \cap G_2 \cap G_3\} \cup \{G_1^c \cap G_2 \cap G_3^c\} \cup \{G_1 \cap G_2^c \cap G_3^c\}) \\
&= \mathcal{P}(G_1 \cap G_2^c \cap G_3) + \mathcal{P}(G_1^c \cap G_2 \cap G_3) + \mathcal{P}(G_1^c \cap G_2 \cap G_3^c) + \mathcal{P}(G_1 \cap G_2^c \cap G_3^c) \\
&= \mathcal{P}(G_1)\mathcal{P}(G_2^c)\mathcal{P}(G_3) + \mathcal{P}(G_1^c)\mathcal{P}(G_2)\mathcal{P}(G_3) + \mathcal{P}(G_1^c)\mathcal{P}(G_2)\mathcal{P}(G_3^c) + \mathcal{P}(G_1)\mathcal{P}(G_2^c)\mathcal{P}(G_3^c) \\
&= p(1-p)^2 + p(1-p)^2 + p^2(1-p) + p^2(1-p) \\
&= 2p(1-p)
\end{aligned}$$

Segue que

$$\mathcal{E}(X) = 2\mathcal{P}(X=2) + 3\mathcal{P}(X=3) = 2[p^2 + (1-p)^2] + 3[2p(1-p)] = 2 + 2p(1-p).$$

b) Quando $i = 3$ a v.a. X pode assumir os valores 3, 4 ou 5. Por argumentos análogos ao do item anterior chegamos às probabilidades

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X=3) &= p^3 + (1-p)^3, \\
\mathcal{P}(X=4) &= 3p^3(1-p) + 3p(1-p)^3, \\
\mathcal{P}(X=5) &= 3(1-p)^2p^3 + 3(1-p)^3p^2 = 6p^2(1-p)^2.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= 3\mathcal{P}(X=3) + 4\mathcal{P}(X=4) + 5\mathcal{P}(X=5) \\
&= 3[p^3 + (1-p)^3] + 4[3p^3(1-p) + 3p(1-p)^3] + 5[6p^2(1-p)^2] \\
&= 6p^4 - 12p^3 + 3p^2 + 3p + 3.
\end{aligned}$$

c) Primeiramente, façamos $\mathcal{E}(X) = f(p)$ para o **item a)** e $\mathcal{E}(X) = g(p)$ para o **item b)**. Como queremos maximizar a esperança, derivamos as funções $f(p)$ e $g(p)$ no intervalo $0 < p < 1$.

$$f'(p) = 2 - 4p \quad \text{e} \quad g'(p) = 24p^3 - 26p^2 + 6p + 3$$

e, portanto, $p = 1/2$ é ponto crítico de ambas as funções. Para confirmar que $p = 1/2$ é, de fato, um ponto de máximo basta observar que, nesse ponto, as funções

$$f'(p) = -4 \quad \text{e} \quad g'(p) = 72p^2 - 72p + 6$$

são negativas.

14. Vamos considerar que X é a variável que dá o valor da pontuação obtida pelo meteorologista. Então $\mathcal{P}(X = 1-(1-p)^2) = p^*$ e $\mathcal{P}(X = 1-p^2) = 1-p^*$. Segue que

$$\mathcal{E}(X) = p^*(1-(1-p^2)) + (1-p^*)(1-p^2) = f(p).$$

Como queremos maximizar a esperança derivamos a função $f(p)$ no intervalo $0 < p < 1$.

$$f'(p) = 2p^*(1-p) - 2p(1-p^*) = 0 \Leftrightarrow p = p^*$$

obtendo p^* como ponto crítico. Para confirmar que p^* é, de fato, um ponto de máximo basta observar que $f''(p^*) = -2$.

15. Vamos denotar por X a variável que representa o número de motores funcionando em um avião de 5 motores e Y a variável que representa o número de motores funcionando em um avião de 3 motores. Estamos interessados nos valores de p para o qual

$$\mathcal{P}(X \geqslant 3) \geqslant \mathcal{P}(Y \geqslant 2).$$

Como p representa a probabilidade de sucesso (o motor funciona) a desigualdade acima ocorre e

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4(1-p) + p^5 \geqslant \binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3 \\
&\Leftrightarrow 6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 6(p-1/2)(p-1)^2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow p \geqslant 1/2.
\end{aligned}$$

16. a) $\mathcal{P}(X = k) = \binom{25}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{25-k}, \; k = 0, 1, \ldots, 25.$

b) As probabilidades são

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X \leqslant 1) &= \mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) \approx 0,0274, \\
\mathcal{P}(X < 1) &= \mathcal{P}(X = 0) \approx 0,0038, \\
\mathcal{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathcal{P}(X < 1) \approx 0,9962, \\
\mathcal{P}(X > 1) &= 1 - \mathcal{P}(X \leqslant 1) \approx 0,9726, \\
\mathcal{P}(\{2 \leqslant X \leqslant 4\}) &= = \mathcal{P}(X = 2) + \mathcal{P}(X = 3) + \mathcal{P}(X = 4) \approx 0,3933, \\
\mathcal{P}(\{2 \leqslant X < 4\}) &= = \mathcal{P}(X = 2) + \mathcal{P}(X = 3) \approx 0,2066, \\
\mathcal{P}(\{2 < X \leqslant 4\}) &= = \mathcal{P}(X = 3) + \mathcal{P}(X = 4) \approx 0,3225, \\
\mathcal{P}(\{2 < X < 4\}) &= = \mathcal{P}(X = 3) \approx 0,1358.
\end{aligned}$$

c) A aleatoriedade das respostas.

17. Seja X a variável que representa o número de assegurados sobreviventes. A probabilidade associada à variável X é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{20}{k} (0,9)^k (0,1)^{20-k}, \; k = 0, 1, \ldots, 20.$$

a) $\mathcal{P}(X = 20) \approx 0,1216.$

b) $\mathcal{P}(X = 0) \approx 0.$

c) $\mathcal{P}(X \geqslant 5) \approx 1.$

d) $\mathcal{P}(X \geqslant 15) \approx 0,9888.$

e) $\mathcal{P}(X = 17) \approx 0,1901.$

f) $\mathcal{P}(X \geqslant 18) \approx 0,6769.$

g) $\mathcal{P}(X \leqslant 15) \approx 0,0432.$

h) $\mathcal{E}(X) = 20 \times 0,9 = 18$ e $\mathrm{Var}(X) = 20 \times 0,9 \times 0,1 = 1,8$.

i) Seja Y a variável referente ao número de mortos no período dado. $\mathcal{E}(Y) = 20 \times 0,1 = 2$ e $\mathrm{Var}(Y) = 20 \times 0,1 \times 0,9 = 1,8$.

18. Seja X a variável que representa o número de pacientes curados. A probabilidade associada à variável X é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{15}{k} (0,8)^k \, (0,2)^{15-k}, \ k = 0, 1, \ldots, 15.$$

a) $\mathcal{P}(X = 15) \approx 0,0352$.

b) $\mathcal{P}(X \leqslant 13) \approx 0,8329$.

c) $\mathcal{P}(X \geqslant 10) \approx 0,9389$.

19. Seja X a variável que representa o número de bactérias em 5cm^3. Como a taxa média em 1cm^3 é de 0,8; em 5cm^3 será de 4. Desse modo, a variável X é uma Poisson de parâmetro 4 cuja distribuição é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \frac{4^k}{k!} e^{-4}, \ k = 0, 1, \ldots$$

a) $\mathcal{P}(X \geqslant 2) \approx 0,9084$.

b) $\mathcal{P}(X \geqslant 13) \approx 0,0003$.

c) $\mathcal{P}(X = 0) \approx 0,0183$.

b) $\mathcal{P}(X \leqslant 7) \approx 0,9489$.

20. Seja X a variável que representa o número de suicídios. A probabilidade associada à variável X é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{500.000}{k} \left(\frac{1}{250.000}\right)^k \left(\frac{249.999}{250.000}\right)^{500.000-k}, \ k = 0, 1, \ldots, 500.000.$$

a) $\mathcal{P}(X \geqslant 6) \approx 0,0166$.

b) Sim, bastaria mudar os parâmetros de acordo com os dados relativos à dengue.

21. Seja X a variável relativa ao número de peças defeituosas. A probabilidade associada à variável X é dada por

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{3}{12}\right)^k \left(\frac{9}{12}\right)^{4-k}, \ k = 0, 1, \ldots, 4.$$

a) $\mathcal{P}(X \geqslant 2) \approx 0,2617$.

b) $\mathcal{P}(X \leqslant 1) \approx 0,7383$.

c) $\mathcal{P}(X \leqslant 3) \approx 0,9961$.

22. Seja X a variável relativa ao número de bolas brancas retiradas.

a) Nesse caso X tem distribuição hipergeométrica. Como escolhemos 3 entre as 10 bolas brancas e 2 entre as bolas vermelhas, segue que

$$\mathcal{P}(X = 3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{2}}{\binom{30}{5}} \approx 0,1599.$$

b) Nesse caso X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 5$ e $p = 1/3$. Segue que

$$\mathcal{P}(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0,1646.$$

23. a) Seja $X \sim$ Bin(4/10,10) a variável responsável pelos 10 lançamentos da moeda 1 e $Y \sim$ Bin(7/10,10) a variável responsável pelos 10 lançamentos da moeda 2. Como cada moeda pode ser selecionada com 50% de chances, a probabilidade desejada é

$$\frac{1}{2}\mathcal{P}(X = 7) + \frac{1}{2}\mathcal{P}(Y = 7) = \frac{1}{2}\binom{10}{7}(0,4)^7(0,6)^3 + \frac{1}{2}\binom{10}{7}(0,7)^7(0,3)^3.$$

b) Se A representa o evento em que temos 7 caras em 10 lançamentos e B representa o evento em que o primeiro lançamento resulta em cara, a probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}.$$

Para calcular $\mathcal{P}(A \cap B)$ basta observar que, sendo o primeiro lançamento cara, nos resta escolher 6 possíveis caras dentre 9 lançamentos restantes. Se $X \sim$ Bin(4/10,9) é a variável responsável pelos 9 lançamentos da moeda 1 e $Y \sim$ Bin(7/10,9) a variável responsável pelos 9 lançamentos da moeda 2, temos que

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(X = 6) + \frac{1}{2}\mathcal{P}(Y = 6) = \frac{1}{2}\binom{9}{6}(0,4)^6(0,6)^3 + \frac{1}{2}\binom{9}{6}(0,7)^6(0,3)^3.$$

Agora, para calcular $\mathcal{P}(B)$, basta representarmos o primeiro lançamento da moeda 1 por $W \sim$ Ber(0,4) e o primeiro lançamento da moeda 2 por $Z \sim$ Ber(0,7) e

$$\mathcal{P}(B) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(W = 1) + \frac{1}{2}\mathcal{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}(0,4) + \frac{1}{2}(0,7).$$

24. Se A representa o evento em que uma pessoa tem 2 resfriados no ano e B representa o evento em que a droga é benéfica, a probabilidade que procuramos é

$$\mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A|B^c)\mathcal{P}(B^c)}.$$

Sejam $X \sim$ Pois(5) e $Y \sim$ Pois(3), então

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A|B^c)\mathcal{P}(B^c)} &= \frac{\mathcal{P}(Y = 2)(0,75)}{\mathcal{P}(Y = 2)(0,75) + \mathcal{P}(X = 2)(0,25)} \\ &= \frac{\frac{3^2}{2!}e^{-3}(0,75)}{\frac{3^2}{2!}e^{-3}(0,75) + \frac{5^2}{2!}e^{-5}(0,25)}.\end{aligned}$$

25. Do enunciado temos que $Y \sim$ Pois(2).

a) $\mathcal{P}(Y < 2) = \mathcal{P}(Y = 0) + \mathcal{P}(Y = 1) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} \approx 0,4060.$

b) $\mathcal{P}(2 \leqslant Y < 4) = \mathcal{P}(Y = 2) + \mathcal{P}(Y = 3) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx 0,4511.$

c) $\mathcal{P}(Y > 0) = 1 - \mathcal{P}(Y = 0) = 1 - e^{-2} \approx 0,1353.$

d) $\mathcal{P}(Y = 1|Y < 3) = \frac{\mathcal{P}(\{Y=1\}\cap\{Y<3\})}{\mathcal{P}(Y<3)} = \frac{\mathcal{P}(Y=1)}{\mathcal{P}(Y<3)} = \frac{2e^{-2}}{3e^{-2}+\frac{4}{3}e^{-2}} = 0,4.$

26. Seja X a variável correspondente ao número de defeitos. Do enunciado temos que $X \sim \text{Pois}(1)$.

    a) $\mathcal{P}(X \geqslant 1) \approx 0,6321$.

    b) $\mathcal{P}(X \leqslant 2) \approx 0,9197$.

    c) $\mathcal{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) \approx 0,2606$.

    d) $\mathcal{P}(X \leqslant 1) \approx 0.7358$.

27. Do enunciado temos que $X \sim \text{Pois}(2)$.

    a) $\mathcal{P}(X > 3) \approx 0,1429$.

    b) Queremos encontrar k tal que $\mathcal{P}(X \leqslant k) \geqslant 0,90$. Por tentativa e erro encontramos $k = 4$. Concluímos que as instalações deveriam atender no máximo quatro petroleiros por dia.

    c) $\mathcal{P}(X = 5) \approx 0,0361$.

    d) Caso $X \geqslant 3$ atende-se apenas três petroleiros, desse modo temos

    $$\mathcal{E}(X) = 0\mathcal{P}(X = 0) + 1\mathcal{P}(X = 1) + 2\mathcal{P}(X = 2) + 3\mathcal{P}(X \geqslant 3) \approx 1,7819.$$

28. Do enunciado temo que $X \sim \text{Pois}(10)$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X = k) &= \mathcal{P}(X = k+1) \iff \\
\frac{10^k}{k!}e^{-10} &= \frac{10^{k+1}}{(k+1)!}e^{-10} \iff \\
\frac{(k+1)!}{k!} &= \frac{10^{k+1}}{10^k} \iff \\
k+1 &= 10 \iff \\
k = 9.
\end{aligned}$$

29. Seja X a variável correspondente ao número de itens defeituosos, desse modo sabemos que $X \sim \text{Bin}(10; 0,2)$. A probabilidade de que tenhamos no máximo um item defeituoso é

$$\mathcal{P}(X \leqslant 1) = \binom{10}{0} 0,2^0 \times 0,8^{10} + \binom{10}{1} 0,2^1 \times 0,8^9 \approx 0,3758.$$

Podemos, também, aproximar esta probabilidade por meio de uma Poisson de parâmetro $\lambda = 10 \times 0,2 = 2$. Segue que

$$\mathcal{P}(X \leqslant 1) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} \approx 0,4060.$$

30. Seja X a variável referente ao o número de chamadas que chegam por minuto. Segue que $X \sim \text{Pois}(8)$.

    a) $\mathcal{P}(X \geqslant 10) \approx 0,2834$.

    b) $\mathcal{P}(X < 9) \approx 0,5926$.

    c) $\mathcal{P}(7 \leqslant X < 9) \approx 0,2792$.

31. Primeiramente seja $X \sim \text{Pois}(3)$.

a) A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X \geqslant 3) &= 1 - \mathcal{P}(X < 3) \\
&= 1 - \{\mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) + \mathcal{P}(X = 2)\} \\
&= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \frac{3^2}{2}e^{-3} \\
&= 1 - \frac{17}{2}e^{-3}.
\end{aligned}$$

b) A probabilidade condicional é

$$\mathcal{P}(X \geqslant 3 | X \geqslant 1) = \frac{\mathcal{P}(\{X \geqslant 3\} \cap \{X \geqslant 1\})}{\mathcal{P}(X \geqslant 1)} = \frac{\mathcal{P}(X \geqslant 3)}{\mathcal{P}(X \geqslant 1)} = \frac{1 - \frac{17}{2}e^{-3}}{1 - e^{-3}}.$$

32. Usando as propriedades de esperança e variância temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y) &= \mathcal{E}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathcal{E}(X - \mu) \\
&= \frac{1}{\sigma}\{\mathcal{E}(X) - \mu\} = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\text{Var}(X - \mu) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\text{Var}(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Podemos lembrar da **Questão 9** da **1ª Lista** que os dados, quando padronizados, tem média zero e variância 1. Como era de se esperar, a média de uma variável aleatória padronizada é zero e a sua variância é 1.

33. A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X = n + k | X > n) &= \frac{\mathcal{P}(\{X = n + k\} \cap \{X > n\})}{\mathcal{P}(X > n)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(X = n + k)}{\mathcal{P}(X > n)} \\
&= \frac{p(1 - p)^{n+k-1}}{(1 - p)^n} \\
&= p(1 - p)^k.
\end{aligned}$$

Se os primeiros n ensaios falham, então é como se estivéssemos recomeçando o experimento a partir do n-ésimo ensaio.