Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

$5^{\underline{a}}$ Lista de PE

1. Um time de basquete irá jogar uma temporada de 44 jogos. 26 desses jogos serão disputados contra times da classe A e os 18 restantes contra times da classe B. Suponha que o time irá vencer cada jogo contra times da classe A com probabilidade 0,4 e irá vencer cada jogo contra times da classe B com probabilidade 0,7. Suponha também que os resultados de diferentes jogos são independentes. Use a normal para aproximar a probabilidade de que

   a) o time ganhe 25 jogos ou mais;

   b) o time ganhe mais jogos contra times da classe A do que da classe B.

2. Justifique porque a soma de n v.a.'s bernoulli é uma binomial.

3. Suponha que 3 bolas são escolhidas de uma urna contendo 3 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 5 bolas azuis sem reposição. Seja X o número de bolas vermelhas e Y o número de bolas brancas. Faça uma tabela de distribuição conjunta de X e Y e indique as probabilidades marginais.

4. Lançam-se, simultaneamente, uma moeda e um dado.

   a) Determine o espaço amostral correspondente a esse experimento.

   b) Obtenha a tabela da distribuição conjunta, considerando X o número de caras no lançamento da moeda e Y o número da face do dado.

   c) Verifique se X e Y são independentes.

   d) Calcule $\mathcal{P}(X \geqslant 0, Y \leqslant 4)$.

5. A tabela abaixo fornece a distribuição conjunta de X e Y.

Y / X	1	2	3
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0,0	0,3
2	0,0	0,1	0,1

   a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

   b) Obtenha as esperanças e variâncias de X e Y.

   c) Verifique se X e Y são independentes.

   d) Calcule $\mathcal{P}(X = 1|Y = 0)$ e $\mathcal{P}(Y = 2|X = 3)$.

   e) Calcule $\mathcal{P}(X \leqslant 2)$ e $\mathcal{P}(X = 2, Y \leqslant 1)$.

6. Considere a distribuição conjunta de X e Y, parcialmente conhecida, dada na tabela abaixo.

Y / X	-1	0	1	$\mathcal{P}(Y = y)$
-1	1/12			
0				1/3
1	1/4		1/4	
$\mathcal{P}(X = x)$				1

a) Complete a tabela, considerando X e Y independentes.

b) Calcule as médias e variâncias de X e Y.

c) Obtenha as distribuições condicionais de X, dado que $Y = 0$, e de Y, dado que $X = 1$.

d) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$ e $\text{Var}(X + Y)$.

7. Simbolizando a correlação das variáveis aleatórias X e Y por $\rho(X, Y) = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. Mostre que

a) $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$;

b) $\rho(X + a, Y + b) = \rho(X, Y)$;

c) $\rho(aX, bY) = \dfrac{ab}{|ab|}\rho(X, Y)$.

8. Suponha que X e Y tenham a seguinte distribuição conjunta:

Y / X	1	2	3
1	0,1	0,1	0,0
2	0,1	0,2	0,3
3	0,1	0,1	0,0

a) Determine a distribuição de $X + Y$ e, a partir dela, calcule $\mathcal{E}(X + Y)$. Pode-se obter a mesma resposta de outra maneira?

b) Determine a distribuição de XY e, em seguida, calcule $\mathcal{E}(XY)$.

c) Mostre que, embora $\mathcal{E}(XY) = \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)$, X e Y não são independentes.

d) Calcule $\text{Var}(X + Y)$.

9. Suponha que temos uma urna contendo três bolas numeradas 1, 2 e 3. Retiramos duas bolas dessa urna, sem reposição. Seja X o número da primeira bola e Y o número da segunda bola retirada.

a) Encontre a distribuição conjunta de (X, Y) com suas respectivas distribuições marginais.

b) Encontre a distribuição de probabilidades marginais das variáveis $Z = X + Y$ e $W = XY$.

c) Calcule $\mathcal{P}(X < Y)$.

d) Calcule $\mathcal{E}(X)$; $\mathcal{E}(Y)$; $\mathcal{E}(Z)$ e $\mathcal{E}(W)$.

e) Calcule $\text{Var}(X)$ e $\text{Var}(Y)$.

f) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

g) X e Y são independentes?

10. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer. Mostre que $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$.

11. O número de pessoas que entram em uma drogaria em uma hora é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 10$. Calcule a probabilidade condicional de que no máximo 3 homens entrem na drogaria dado que 10 mulheres entraram nessa hora. Que hipóteses você tomou?

12. Se X e Y são v.a.'s de Poisson independentes com parâmetros λ_1 e λ_2 respectivamente, calcule a distribuição condicional de X dado que $X + Y = n$.

13. Uma v.a. X tem distribuição normal, com média 100 e desvio padrão 10.

    a) Qual a $\mathcal{P}(90 < X < 110)$?

    b) Se $\overline{X}$ for a média de uma amostra de 16 elementos retirados dessa população, calcule $\mathcal{P}\left(90 < \overline{X} < 110\right)$.

    c) Represente, num único gráfico, as distribuições de X e $\overline{X}$.

    d) Que tamanho deveria ter a amostra para que $\mathcal{P}\left(90 < \overline{X} < 110\right) = 0,95$?

14. A máquina de empacotar um determinado produto, o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão 10g.

    a) Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500g?

    b) Com a máquina assim regulada, qual a probabilidade de que o peso total de 4 pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 2kg?

15. A capacidade máxima de um elevador é de 500kg. Se a distribuição X dos pesos dos usuários for suposta $\mathcal{N}(70, 100)$, qual é a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite?

16. Uma máquina enche pacotes de café com um peso (medido em gramas) que se comporta segundo uma variável aleatória X, onde $X \sim \mathcal{N}(200, 100)$. Uma amostra de 25 pacotes é sorteada e pergunta-se:

    a) qual é o número esperado de pacotes na amostra com peso inferior a 205 gramas?

    b) qual a probabilidade de que o peso total dos pacotes da amostra não exceda 5125 gramas?

17. Suponha que 45% de uma população esteja a favor de um certo candidato em uma eleição vindoura. Se uma AAS de tamanho 200 é escolhida dentre indivíduos dessa população, calcule

    a) o valor esperado e o desvio padrão do número de indivíduos a favor do candidato;

    b) aproxime a probabilidade de que mais da metade dos indivíduos na amostra estejam a favor do candidato.

18. Considere M o máximo de uma AAS, $(X_1, \ldots, X_n)$, escolhida de uma população com densidade $f(x)$ e função distribuição $F(x)$. Encontre $F_M(m) = \mathcal{P}(M \leqslant m)$ (a distribuição de M) e a densidade de M.

19. Para o item anterior, encontre a distribuição e a densidade caso a amostra tenha uma distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$.

Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Respostas

1. a) 0,26435.
   b) 0,15625.
2. Demonstração
3. A tabela segue abaixo:

X / Y	0	1	2	3	$\mathcal{P}(X=i)$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
$\mathcal{P}(Y=j)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	

4. a) $\Omega = \{(1,C),(2,C),(3,C),(4,C),(5,C),(6,C),(1,K),(2,K),(3,K),(4,K),(5,K),(6,K)\}$.
   b) A tabela segue abaixo:

X / Y	1	2	3	4	5	6	$\mathcal{P}(X=i)$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{P}(Y=j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

   c) São independentes.
   d) 8/12
5. a) As distribuições marginais seguem na tabela abaixo:

Y / X	1	2	3	$\mathcal{P}(Y=y)$
0	0,1	0,1	0,1	0,3
1	0,2	0,0	0,3	0,5
2	0,0	0,1	0,1	0,2
$\mathcal{P}(X=x)$	0,3	0,2	0,5	1

b) 2,2; 0,9; 0,76 e 0,49

c) Não são independentes.

d) 1/5.

e) 0,1.

6. a) As distribuições marginais seguem na tabela abaixo:

Y / X	-1	0	1	$\mathcal{P}(Y=y)$
-1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

b) 0, 1/3, 1 e 5/9.

c) Os valores são

$$\mathcal{P}(X=-1|Y=0)=\frac{1}{2},\quad \mathcal{P}(X=0|Y=0)=0,\quad \mathcal{P}(X=1|Y=0)=\frac{1}{2},$$

$$\mathcal{P}(Y=-1|X=1)=\frac{1}{6},\quad \mathcal{P}(Y=0|X=1)=\frac{1}{3},\quad \mathcal{P}(Y=1|X=1)=\frac{1}{2}.$$

d) 14/9.

7. a) Demonstração.

b) Demonstração.

c) Demonstração.

8. a) $\mathcal{E}(X+Y)=4$.

b) $\mathcal{E}(XY)=4$.

c) Demonstração.

d) 1.

9. a) A distribuição conjunta segue abaixo:

X / Y	1	2	3	$\mathcal{P}(X=i)$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
$\mathcal{P}(Y=j)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

b) As distribuições seguem abaixo:

k	2	3	4	5	6	Total
$\mathcal{P}(X+Y=k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1

k	1	2	3	4	6	9	Total
$\mathcal{P}(XY=k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1

c) 1/2.

d) 2; 2; 4 e 11/3.

e) 2/3 e 2/3.

f) $-1/3$.

g) Não.

10. Demonstração.

11. $e^{-5} + 5e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} + \frac{5^3}{3!}e^{-5}$.

12. $\binom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$.

13. a) 0,68268.

    b) 0,99994.

    d) 4.

14. a) 512,8.

    b) 0,00523.

15. 0,35197.

16. a) $17,29$.

    b) $0,9938$.

17. a) 90 e 7,0356.

    b) 0,06811.

18. A função distribuição é $F_M(m) = [F_X(m)]^n$ e a função densidade é $f_M(m) = n[F_X(m)]^{n-1}f_X(m)$.

19. Nesse caso a função densidade será

$$f_M(m) = \begin{cases} \dfrac{nm^{n-1}}{\theta^n}, & \text{se} \quad m \in (0,\theta), \\ 0, & \text{se} \quad m \notin (0,\theta). \end{cases}$$

e a função distribuição

$$F_M(m) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \leqslant 0, \\ \dfrac{m^n}{\theta^n}, & \text{se} \quad m \in (0,\theta), \\ 1, & \text{se} \quad m \geqslant \theta. \end{cases}$$