



4ª Lista de PE

1. Seja X uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = \begin{cases} C(1 - x^2), & \text{se } x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{se } x \notin (-1, 1). \end{cases}$$

- Qual o valor de C ?
- Qual a função distribuição de X ?
- Calcule $\mathcal{E}(X)$ e $\mathcal{E}|X|$.

2. Seja X uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-x/2}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- Qual o valor de C ?
- Qual a função distribuição de X ?
- Calcule $\mathcal{E}(X)$.

3. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidades dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k, & \text{se } 0 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- Determine o valor de k .
- Calcule $\mathcal{P}(1 < X < 2)$.
- Determine o valor de a de forma que $\mathcal{P}(X < a) = \frac{1}{2}$.

4. Suponha que o tempo de corrosão, em anos, de uma certa peça metálica pode ser representada por uma variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ k, & \text{se } 1 < x \leq 2; \\ -kx + 3k, & \text{se } 2 < x \leq 3; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- Qual o tempo máximo que uma peça pode ficar sem se corroer?
- Calcule o valor de k .
- Calcule $\mathcal{P}(0,5 < X < 1,5)$.
- Determine a função distribuição acumulada da variável aleatória X .

5. Para o item anterior, uma peça é considerada como tendo boa resistência à corrosão se dura mais que 2 anos. Ao selecionarmos, com reposição, 3 peças; qual a probabilidade de termos:

- a) todas peças com boa resistência à corrosão?
 - b) todas peças com baixa resistência à corrosão?
 - c) apenas uma peça com boa resistência à corrosão?
6. Seja X uma variável aleatória qualquer. Para qual valor de k , $\mathcal{E}[(X - k)^2]$ é mínimo?
7. Seja X uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & \text{se } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{se } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Se $\mathcal{E}(X) = \frac{3}{5}$ encontre a e b .

8. A demanda diária de arroz em um supermercado, em centenas de quilos, é denotada por uma variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ -\frac{x}{3} + 1, & \text{se } 1 < x \leq 3; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- a) Qual a probabilidade de se vender, num dia escolhido ao acaso, mais de 150 kg de arroz?
 - b) Qual a quantidade esperada de arroz a ser vendida por esse supermercado num período de um mês (considerando um mês de 30 dias e trabalhando 7 dias por semana)?
 - c) Calcule $\text{Var}(X)$.
 - d) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição na prateleira para que não falte arroz em 95% dos dias?
9. Se X é uma variável aleatória contínua positiva com distribuição F_X e densidade f_X , encontre a densidade de $Y = \log(2X + 3)$.
10. Numa parada específica, os ônibus chegam a cada 15 minutos começando as 7 AM. Isto é, eles chegam às 7, 7:15, 7:30, 7:45, e assim por diante. Se um passageiro chega na parada em um momento em que é distribuído uniformemente entre 7 e 7:30, encontre a probabilidade de que ele espere
- a) menos de 5 minutos por um ônibus;
 - b) mais de 10 minutos por um ônibus.
11. Seja X uniformemente distribuída no intervalo (a, b) , onde $a < b$. Se $\mathcal{E}(X) = 1$ e $\text{Var}(X) = 1/12$, determine:
- a) $\mathcal{P}(X < 3/4)$;
 - b) $\mathcal{P}(0,8 < X < 1,2)$;
 - c) $\mathcal{P}[(X < 0,6) \cup (X > 1,3) | X > 1]$;
 - d) O valor de k tal que $\mathcal{P}(X > k) = 2\mathcal{P}(X < k)$;

e) $\mathcal{E}[g(X)]$, onde

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0,8; \\ 1, & \text{se } 0,8 \leq x \leq 1; \\ -(x+1), & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

12. O comprimento do lado de um quadrado aleatório é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[0, 5]$. Calcule a área esperada do quadrado.
13. Se X tem distribuição normal com parâmetros $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 36$, calcule
 - a) $\mathcal{P}(X < 20)$;
 - b) $\mathcal{P}(X > 16)$;
 - c) $\mathcal{P}(X > 5)$;
 - d) $\mathcal{P}(4 < X < 16)$;
 - e) $\mathcal{P}(|X| < 8)$.
14. Um perito em processos de paternidade afirma que o tempo de gestação humana (em dias) tem distribuição aproximadamente normal com parâmetros $\mu = 270$ e $\sigma^2 = 100$. O réu na ação é capaz de provar que estava fora do país durante um período que começou 290 dias antes do nascimento da criança e terminou 240 dias antes do nascimento. Se o réu era, de fato, o pai da criança, qual é a probabilidade de que a mãe tenha tido a gestação muito longa ou muito curta seguindo a indicação do perito?
15. Suponha que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Determine o valor de k (como função de μ e σ^2) tal que $\mathcal{P}(X \leq k) = 2\mathcal{P}(X > k)$.
16. Suponha que uma turma de Probabilidade e Estatística tenha 30 alunos, dos quais 10 são mulheres e 20 são homens. Suponha também que a altura (em metros) das mulheres segue uma distribuição Normal com média 1,6 e variância 0,09; e a altura dos homens segue uma distribuição Normal com média 1,8 e variância 0,16. Um indivíduo é selecionado aleatoriamente nessa turma:
 - a) Qual a probabilidade desse indivíduo medir mais que 1,7m dado que é homem?
 - b) Qual a probabilidade desse indivíduo ser mulher, dado que mede menos que 1,8m?
 - c) Qual a probabilidade desse indivíduo medir de 1,5m a 1,7m?
 - d) Qual a probabilidade desse indivíduo ser homem e medir mais que 2 metros?
 - e) Qual a probabilidade desse indivíduo ser mulher ou medir menos que 1,8m?
 - f) Ao se formar um grupo de 5 pessoas dessa turma, qual a probabilidade de exatamente 3 indivíduos desse grupo medirem menos que 1,6m?
17. O tamanho ideal de uma classe de primeiro ano em uma faculdade particular é de 150 alunos. A faculdade, sabendo por experiência que, em média, apenas 30% dos alunos aceitos realmente permanecem na faculdade, utiliza uma política de aprovação das aplicações de 450 alunos. Calcule a probabilidade de que mais de 150 alunos do primeiro ano permaneçam na faculdade. Use a aproximação normal à binomial para o cálculo da probabilidade e compare os resultados.
18. Seja X uma variável aleatória que denota o número de caras em 40 lançamentos de uma moeda não viciada. Calcule $\mathcal{P}(19 < X \leq 21)$:

- a) pelo método exato;
- b) pelo método aproximado (Teorema Limite Central).
19. Uma variável aleatória X tem distribuição de Weibull com parâmetros α , β e v se tem densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq v, \\ \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^\beta\right\}, & \text{se } x > v. \end{cases}$$

- a) Encontre a distribuição de X .
- b) Qual a esperança de X quando $\beta = 1$ e $v = 0$?
20. O número de anos em que um determinado rádio funciona é exponencialmente distribuído com parâmetro $\lambda = 1/8$. Se Jonas compra um rádio usado, qual é a probabilidade de que ele estará trabalhando após 8 anos adicionais?
21. Suponha que o tempo de duração, X , de uma consulta médica tenha distribuição exponencial com média de 10 minutos. Calcule a probabilidade dos seguintes eventos:
- a) uma consulta demora 20 minutos no máximo;
- b) uma consulta demora mais de 20 minutos;
- c) uma consulta demora mais que o tempo médio.
22. Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, mostre que para quaisquer que sejam $x \geq 0$ e $t \geq 0$,

$$P(X > x + t | X > t) = P(X > x).$$

Obs: Essa propriedade é conhecida como “perda de memória”. A distribuição Exponencial é a única distribuição contínua (unidimensional) que possui a propriedade de perda de memória.

23. Suponha que o número de milhas que um carro pode percorrer antes de sua bateria acabar é exponencialmente distribuído com média de 10.000 milhas. Se uma pessoa já percorreu 5.000 milhas com seu carro e deseja fazer uma viagem de 10.000 milhas, qual a probabilidade de que esta pessoa consiga completar sua viagem sem precisar trocar a bateria?

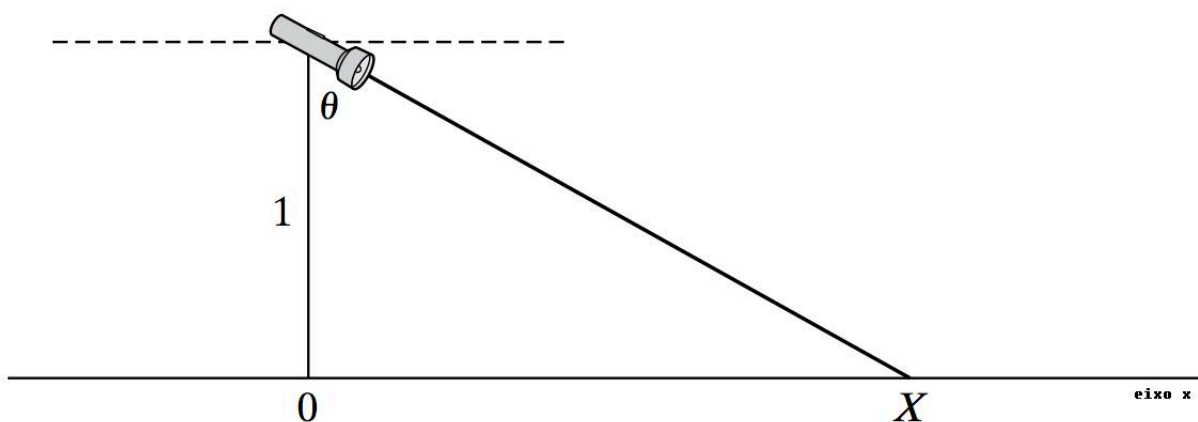
Dica: Use a propriedade de perda de memória da distribuição exponencial.

24. Considere uma variável aleatória $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- a) Calcule $\mathcal{P}(X \leq \mu + 2\sigma)$.
- b) Calcule $\mathcal{P}(|X - \mu| \leq \sigma)$.
- c) Encontre a tal que $\mathcal{P}(X > a) = 0,90$.
- d) Demonstre que aproximadamente 95% da distribuição de X pertence ao intervalo $(\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma)$.
- e) Para que valor de β aproximadamente 99% da distribuição de X estaria no intervalo $(\mu - \beta\sigma, \mu + \beta\sigma)$?

25. Um banco faz operações via Internet e, após um estudo sobre o serviço prestado, concluiu que o tempo de conexão (em minutos) de cada cliente segue uma distribuição Exponencial com parâmetro λ , onde $\lambda = 2$ se o cliente for pessoa física e $\lambda = 1$ se o cliente for pessoa jurídica. A porcentagem de pessoas físicas que utilizam esse serviço é estimada na ordem de 30%. Com base nisso, calcule:

- a) a probabilidade de uma pessoa física ficar mais de 1 minuto conectada;
- b) a probabilidade de uma pessoa jurídica ficar menos de 5 minutos conectada;
- c) a probabilidade de um cliente ficar mais de 2 minutos conectado;
- d) a probabilidade de uma pessoa física ficar mais de 4 minutos conectada dado que ela já está conectada a 3 minutos;
- e) se um cliente fica mais de 2 minutos conectado, qual a probabilidade dele ser uma pessoa jurídica?

26. Suponha que uma lanterna é girada em torno do seu centro, o qual está localizado à distância de uma unidade do eixo x (veja a figura abaixo). Consideremos o ponto X no qual o feixe intersecta o eixo x quando a lanterna para de girar. (Se o feixe não está apontando na direção do eixo x , repetir a experiência.)



- a) Deduza, a partir do experimento, que a função densidade da variável X é dada por $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, para todo x real.
- b) Mostre que $f(x)$ é, de fato, uma densidade.
- c) A distribuição acima é conhecida como distribuição de Cauchy e é famosa por não possuir esperança finita. Sabendo que uma variável aleatória possui esperança $\mathcal{E}(X)$ se, e somente se $\mathcal{E}|X|$ existir, prove que X não possui esperança finita.

27. Seja X uma v.a. contínua com densidade $f_X(x)$. Encontre a densidade de $Y = |X|$.

28. Seja X uma v.a. contínua não negativa com densidade $f_X(x)$. Encontre a densidade de $Y = X^n$.

29. Seja X uniformemente distribuída no intervalo $(-1, 1)$. Encontre

- a) $\mathcal{P}(|X| > 1/2)$;

- b) densidade de $Y = |X|$.
30. Se Y é uniformemente distribuída no intervalo $(0, 5)$, qual a probabilidade de que as raízes da equação $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sejam ambas reais?
31. Seja X exponencial de parâmetro $\lambda = 1$. Encontre a densidade de $Y = \log X$.
32. Seja X uniformemente distribuída no intervalo $(0, 1)$. Encontre a densidade de $Y = e^X$.
33. Seja Z uma variável aleatória normal padrão. Mostre que, para $x > 0$,
- $\mathcal{P}(Z > x) = \mathcal{P}(Z < -x)$;
 - $\mathcal{P}(|Z| > x) = 2\mathcal{P}(Z > x)$;
 - $\mathcal{P}(|Z| < x) = 2\mathcal{P}(Z < x) - 1$.
34. Seja X uma v.a. com distribuição de Weibull, como na **Questão 19**. Mostre que $Y = \left(\frac{X - v}{\alpha}\right)^\beta$ tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$.
35. Sejam $X \sim \text{Exp}(2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(4, 9)$. Encontre os quantis $q(0, 25)$, $q(0, 5)$ e $q(0, 75)$ para ambas as distribuições.
36. Suponha que a função de distribuição de uma variável aleatória X é dada por
- $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{3}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ \frac{x+6}{12}, & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ \frac{5}{6}, & \text{se } 3 \leq x < 4, \\ 1, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$
- Construa o gráfico de $F(x)$.
 - Encontre $\mathcal{P}(X = 1,5)$.
 - Encontre $\mathcal{P}(X = 2)$.
 - Encontre $\mathcal{P}(2,2 < X < 3,7)$.



Respostas

1. a) $3/4$
b) A função distribuição é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1, \\ \frac{3}{4} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \right), & \text{se } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

c) $\mathcal{E}(X) = 0$ e $\mathcal{E}|X| = 2/8$.

2. a) $1/4$.
b) A função distribuição é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}xe^{-x/2} - e^{-x/2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

c) 4

3. a) $1/12$.
b) $1/3$.
c) $a = 2$.

4. a) 3 anos.
b) $1/2$.
c) $7/16$.
d)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4} + \frac{(2x-1)}{4}, & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ \frac{-x^2 + 6x - 5}{4}, & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

5. a) $1/64$.
b) $27/64$.
c) $27/64$.

6. $k = \mathcal{E}(X)$

7. $a = 3/5$ e $b = 6/5$.

8. a) 3/8.
b) 4 toneladas.
c) 7/18.
d) 245 kg.
9. $\frac{1}{2}e^x f_X\left(\frac{e^x-3}{2}\right)$.
10. a) 1/3.
b) 1/3.
11. a) 0,25.
b) 0,4.
c) 0,4.
d) 5/6.
e) -0,73.
12. 25/3.
13. a) 0,95254.
b) 0,15866.
c) 0,79673
d) 0,68268
e) 0,36935
14. 0,0241
15. $k = 0,43\sigma + \mu$.
16. a) 0,5987.
b) 0,4281.
c) 0,2026.
d) 0,2057.
e) 0,6667.
f) 0,2034.
17. Aproximadamente 0,06178
18. a) 0,2448.
b) 0,2510.
19. a) A função distribuição é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq v, \\ 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^\beta\right\}, & \text{se } x > v. \end{cases}$$

- b) α .

20. e^{-1} .
21. a) $1 - e^{-2}$.
 b) e^{-2} .
 c) e^{-1} .
22. Aplique a definição de condicional e utilize a distribuição.
23. 0,607.
24. a) 0,9773.
 b) 0,6827.
 c) $a = -(\mu + 1, 28\sigma)$.
 d) Demonstração.
 e) $\beta = 2, 58$.
25. a) 0,1353.
 b) 0,9933.
 c) 0,1002.
 d) 0,1353.
 e) 0,9452.
26. a) $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < \infty$
 b) 1
 c) $+\infty$.
27. $f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$, $y \geq 0$.
28. $f_Y(y) = \frac{1}{n}y^{1/n-1}f_X(y^{1/n})$, $y \geq 0$.
29. a) 1/2.
 b) $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
30. 3/5
31. $f_Y(y) = e^y e^{-e^y}$, $y \in \mathbb{R}$.
32. $f_Y(y) = \frac{1}{y}$, $1 < y < e$.
33. Demonstração.
34. Demonstração.
35. 0,1438; 0,3466 e 0,6932.
 1,9600; 4,0000 e 6,0400.
36. a) Construa o gráfico.
 b) 0.
 c) 1/6.
 d) 3/20.