Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

3ª Lista de PE

1. Duas bolas são escolhidas aleatoriamente de uma urna contendo 8 bolas brancas, 4 pretas, e duas bolas laranjas. Suponha que um jogador ganha 2 reais por cada bola preta selecionada e perde 1 real para cada bola branca selecionada. Seja X o ganho do jogador. Quais são os possíveis valores de X, e quais são as probabilidades associadas a cada valor?

2. Seja X uma variável aleatória discreta com $\mathcal{P}(X = 0) = 0,25$, $\mathcal{P}(X = 1) = 0,125$, $\mathcal{P}(X = 2) = 0,125$ e $\mathcal{P}(X = 3) = 0,5$.

   a) Construa o gráfico da função probabilidade de massa e da função de distribuição acumulada.
   b) Calcule o valor esperado, a moda e a mediana de X.
   c) Calcule a variância de X.
   d) Calcule as probabilidades $\mathcal{P}(0 < X < 1)$, $\mathcal{P}(X \leqslant 2)$, $\mathcal{P}(X > 3)$ e $\mathcal{P}(X > 2,5)$.

3. Suponha que a função de distribuição de uma variável aleatória X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{11}{12} & \text{se} \quad 2 \leqslant x < 3, \\ 1, & \text{se} \quad x \geqslant 3. \end{cases}$$

   a) Construa o gráfico de $F(x)$.
   b) Encontre $\mathcal{P}(X = i)$, $i = 1, 2, 3$.
   c) Encontre $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.

4. Seja X uma variável aleatória que representa o número de peças produzidas por uma máquina em um período de um dia. A probabilidade da máquina estar desligada em um dia qualquer é $\frac{1}{2}$ (Se a máquina estiver desligada, então ela não produz nenhuma peça). A probabilidade da máquina estar ligada e produzir i peças é dada por $\mathcal{P}(X = i) = p^i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Pergunta-se:

   a) Qual é o valor de p?
   b) Qual a probabilidade da máquina produzir pelo menos 5 peças em um dia?
   c) Qual a probabilidade da máquina produzir um número par de peças em um dia?

5. Seja X uma variável aleatória que assume os valores -1, 0 e 1 com as respectivas probabilidades

$$\mathcal{P}(X = -1) = 0,2, \quad \mathcal{P}(X = 0) = 0,5 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}(X = 1) = 0,3.$$

   Encontre a esperança e a variância de X.

6. A partir de dados do último censo, a assistente social de um centro de saúde constatou que, para as famílias da região, 20% delas não possuem filhos, 30% possui um filho, 35% possui dois filhos e as famílias restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos.

   a) Determine a função de distribuição acumulada da variável N, referente ao número de filhos das famílias na região.

   b) Se uma família é escolhida aleatoriamente nessa região, qual a probabilidade de que o número de filhos nessa família seja maior o igual a 2?

   c) Calcule o valor esperado e a variância da variável N.

7. Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidades:

$$\mathcal{P}(X = x) = \frac{k}{x}, \quad \text{onde } X \text{ assume os valores } 1, 3, 5, 7.$$

   a) Determine o valor de k.

   b) Calcule $\mathcal{P}(X < 5)$.

8. Considere uma moeda viciada onde a probabilidade de ocorrência da face cara é quatro vezes a probabilidade de ocorrência da face coroa. Essa moeda é jogada três vezes. Seja X o número de caras que aparece. Determine a distribuição de probabilidades de X e também a função de distribuição acumulada.

9. Considere o experimento de jogar dois dados sequencialmente e anotar os resultados. Seja X a variável que computa a soma dos resultados observados nos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidades da variável X e calcule sua esperança.

10. Suponha que o tempo X, em minutos, necessários para um operário processar uma certa peça é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidades:

k	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(X = k)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

   a) Calcule $\mathcal{E}(X)$, o tempo médio de processamento de uma peça.

   b) Calcule $\text{Var}(X)$.

   c) Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de R$ 2,00, mas se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha R$ 0,50 por minuto poupado (por exemplo, se o operário processa a peça em 4 minutos, ele recebe a quantia adicional de R$ 1,00). Encontre o ganho médio do operário por peça processada.

11. Um pintor produz pelo menos um quadro por dia (esse pintor pode produzir $1, 2, 3, \ldots$ quadros por dia). Seja X uma variável aleatória que denota o número de quadros produzidos por esse pintor em um dia qualquer. A distribuição de probabilidades de X é dado por $\mathcal{P}(X = k) = (0,5)^k$, para $k = 1, 2, \ldots$

   a) Calcule $\mathcal{P}(X < 10)$.

   b) Calcule $\mathcal{E}(X)$.

c) Se o pintor vende cada quadro produzido por R$ 50,00, qual é o ganho esperado desse pintor em um mês (considere um mês de 30 dias) de trabalho?

12. Um jogo popular em ruas e cassinos consiste no seguinte: um jogador aposta em um dos números de 1 a 6 e três dados são, então, lançados. Se o número apostado pelo jogador aparecer i vezes (onde $i = 1, 2, 3$), o jogador ganha i unidades, e se o número apostado pelo jogador não aparecer em qualquer um dos dados, então o jogador perde uma unidade. Este jogo é justo para o jogador?

13. Suponha que duas equipas jogam uma série de jogos que termina quando um deles ganhar i jogos. Suponha que cada jogo realizado é ganho pela equipe A, de forma independente, com probabilidade p.

    a) Encontre o número esperado de jogos que são realizados quando $i = 2$.

    b) Encontre o número esperado de jogos que são realizados quando $i = 3$.

    c) Mostre que, em ambos os casos (**a** e **b**), este número é maximizado quando $p = 1/2$.

14. A cada noite um meteorologista diferente nos dá a probabilidade de que irá chover no dia seguinte. Para julgar quem tem melhores previsões, iremos pontuá-los da seguinte maneira: Se um meteorologista diz que irá chover no dia seguinte com probabilidade p, então ele ou ela receberá a pontuação de

$$\begin{array}{ll} 1-(1-p)^2, & \text{se chover,} \\ 1-p^2, & \text{se não chover.} \end{array}$$

    Iremos, então, manter o controle de pontos ao longo de um determinado período de tempo e concluir que o meteorologista com a pontuação média mais alta é quem melhor prediz o tempo. Suponhamos agora, que um dado meteorologista está ciente do nosso mecanismo e quer maximizar sua pontuação esperada. Se essa pessoa realmente acredita que vai chover amanhã com probabilidade p^*, qual o valor de p ele ou ela deve propor de forma a maximizar o resultado esperado?

15. Suponha que, em voo, motores de avião irão falhar com probabilidade $1 - p$, independentemente de motor para motor. Se um avião precisa da maioria de seus motores operando para completar um voo bem sucedido, para que valores de p um avião com 5 motores é preferível a um avião com 3 motores?

16. Uma prova consiste em 25 perguntas do tipo múltipla escolha. Cada questão tem 5 respostas, sendo que apenas uma delas é verdadeira. A nota, X, é igual ao número de respostas corretas. Uma pessoa lança um dado equilibrado e indica a resposta cujo número aparece na face de cima do dado (se sair 6 o lance é desconsiderado).

    a) Qual é a distribuição da variável "nota" nestas condições?

    b) Calcule as probabilidades dos eventos abaixo utilizando o modelo escolhido no item anterior: $\{X \leqslant 1\}$, $\{X < 1\}$, $\{X \geqslant 1\}$, $\{X > 1\}$, $\{2 \leqslant X \leqslant 4\}$, $\{2 \leqslant X < 4\}$, $\{2 < X \leqslant 4\}$, $\{2 < X < 4\}$.

    c) Quais das hipóteses do modelo deixariam de ser satisfeitas se a pessoa respondesse seriamente em vez de usar o esquema acima descrito?

17. Uma companhia de seguros vendeu apólices a 20 pessoas com mesma idade e condições de saúde. De acordo com as tábuas atuariais, a probabilidade de que uma pessoa nas condições dos assegurados sobreviva 10 anos à data dos contratos é de 0,9. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

    a) todas as pessoas sobrevivem;
    b) nenhuma sobrevive;
    c) sobrevivem ao menos 5 pessoas;
    d) sobrevivem ao menos 15 pessoas;
    e) morrem exatamente 3 pessoas;
    f) morrem no máximo 2 pessoas;
    g) morrem no mínimo 5 pessoas;
    h) valor médio e variância do número sobreviventes;
    i) valor médio e variância do número de mortos.

18. Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que tem essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. A partir de alguma suposição adicional que julgue necessária, calcule as probabilidades abaixo.

    a) Todos serem curados.
    b) Pelo menos dois não serem curados.
    c) Ao menos 10 ficarem livres da doença.

19. Bactérias de uma certa classe aparecem na água à taxa média de 0,8 por cm^3. Calcule a probabilidade de que em 5 cm^3 de água tenhamos:

    a) no mínimo duas bactérias;
    b) pelo menos 13 bactérias;
    c) nenhuma bactéria;
    d) no máximo sete bactérias.

20. A taxa de suicídios num certo país é de 1 para cada 250.000 habitantes por semana. Considere uma cidade de 500.000 habitantes e responda aos itens abaixo.

    a) Qual a probabilidade de ocorrerem 6 ou mais suicídios numa semana?
    b) Você utilizaria o mesmo modelo se em vez de suicídios a questão tratasse da dengue? Justifique.

21. Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas a boas peças formando um lote com 12 peças no total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar:

    a) pelo menos 2 peças defeituosas;
    b) no máximo uma peça defeituosa;
    c) no mínimo uma peça boa.

22. Considere uma urna com 10 bolas brancas e 20 bolas vermelhas. Retira-se uma amostra de 5 bolas, uma a uma. Qual a probabilidade de 3 bolas serem brancas se:

a) a amostra for sem reposição?
b) a amostra for com reposição?

23. Quando a moeda 1 é lançada, aparece cara com probabilidade 0,4. Quando a moeda 2 é lançada, aparece cara com probabilidade 0,7. Uma dessas moedas é escolhida aleatoriamente e lançada 10 vezes.

    a) Qual é a probabilidade de que a moeda mostre cara exatamente 7 vezes?
    b) Tendo em conta que no primeiro lançamento apareça cara, qual é a probabilidade condicional de que apareça cara exatamente 7 vezes?

24. O número de vezes que uma pessoa contrai um resfriado em um determinado ano é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 5$. Suponha que uma nova droga (com base em grandes quantidades de vitamina C) acaba de ser comercializada e que ela reduz o parâmetro de Poisson a $\lambda = 3$ para 75% da população. Para os outros 25% da população, a droga não tem efeito significativo sobre o resfriado. Se um indivíduo experimenta a droga por um ano e tem 2 resfriados nesse período, qual a probabilidade de que a droga seja benéfica para ele?

25. Uma variável aleatória Y tem densidade Poisson com parametro $\lambda = 2$. Obtenha:

    a) $\mathcal{P}(Y < 2)$
    b) $\mathcal{P}(2 \leqslant Y < 4)$
    c) $\mathcal{P}(Y > 0)$
    d) $\mathcal{P}(Y = 1|Y < 3)$.

26. A aplicação de fundo anti-corrosivo em chapas de aço de 1 m^2 é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Se uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, calcule a probabilidade de:

    a) encontrarmos pelo menos 1 defeito;
    b) no máximo 2 defeitos serem encontrados;
    c) encontrar de 2 a 4 defeitos;
    d) não mais de um defeito ser encontrado.

27. Seja X uma variável aleatória que denota o número de navios petroleiros que chegam a determinada refinaria por dia. Vamos considerar que X segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. As atuais instalações do porto podem atender no máximo três petroleiros por dia. Se mais de três petroleiros aportarem por dia, os excedentes a três deverão seguir para outro porto.

    a) Em um dia qualquer, qual é a probabilidade de se precisar mandar petroleiros para outro porto?
    b) De quanto deverão as atuais instalações ser aumentadas para permitir manobrar todos os petroleiros, em pelo menos 90% dos dias?
    c) Qual a probabilidade de, em um dia qualquer, exatamente dois petroleiros terem que ir para outro porto?
    d) Qual é o número esperado de petroleiros a serem atendidos diariamente neste porto?

28. Seja $X \sim$ Poisson(10). Qual o valor de k tal que $\mathcal{P}(X = k) = \mathcal{P}(X = k + 1)$?

29. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é 0,2. Se 10 itens produzidos por esta máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um item defeituoso seja encontrado? Use a Binomial e a Poisson e compare os resultados.

30. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuiçao de Poisson com média de 8 chamadas por minuto. Determinar a probabilidade de que, em um minuto, se tenha:

    a) 10 ou mais chamadas;

    b) menos do que 9 chamadas;

    c) entre 7 (inclusive) e 9 (exclusive) chamadas.

31. Suponha que o número de acidentes que ocorrem numa estrada, a cada dia, é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 3$.

    a) Encontre a probabilidade de que três ou mais acidentes ocorram hoje.

    b) Repita a parte **a)**, sob o pressuposto de que pelo menos um acidente ocorra hoje.

32. Seja X uma variável aleatória com esperança μ e variância σ^2. Encontre a esperança e a variância da variável
$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

33. Se X é uma variável aleatória geométrica, mostre analiticamente que
$$\mathcal{P}(X = n + k | X > n) = \mathcal{P}(X = k).$$
Usando a interpretação de uma variável aleatória geométrica, dê um argumento verbal do porque a equação anterior é verdadeira.

Respostas

1. Seja X o ganho do jogador, então

$$\mathcal{P}(X=-2)=\frac{28}{91},\quad \mathcal{P}(X=-1)=\frac{16}{91},\quad \mathcal{P}(X=0)=\frac{1}{91}$$

$$\mathcal{P}(X=1)=\frac{32}{91},\quad \mathcal{P}(X=2)=\frac{8}{91},\quad \mathcal{P}(X=4)=\frac{6}{91}$$

2. b) 1,875.
   c) 1,61.
   d) Os valores são, respectivamente, 0; 0,5; 0 e 0,5.

3. b) As probabilidades são

$$\mathcal{P}(X=1)=\frac{1}{4},\quad \mathcal{P}(X=2)=\frac{5}{12}\quad e\quad \mathcal{P}(X=3)=\frac{1}{12}.$$

   c) $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

4. a) 1/3.
   b) 1/162.
   c) 5/8.

5. $\mathcal{E}(X)=0,1$ e $\text{Var}(X)=0,49$.

6. b) 0,5.
   c) 1,64.

7. a) 105/176.
   b) 35/44.

8. $\mathcal{P}(X=0)=\frac{1}{125},\quad \mathcal{P}(X=1)=\frac{12}{125},\quad \mathcal{P}(X=2)=\frac{48}{125}\quad e\quad \mathcal{P}(X=3)=\frac{64}{125}.$

9. $\mathcal{E}(X)=7$.

10. a) $4,6$.
    b) $2,04$.
    c) $2,75$.

11. a) 511/512.
    b) 2.

c) R\$ $3000,00$.

12. O jogo não é justo para o jogador.

13. a) $2 + 2p(1 - p)$.
    b) $6p^4 - 12p^3 + 3p^2 + 3p + 3$.

14. p^*.

15. $p \geqslant 1/2$.

16. a) $\binom{25}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{25-k}$
    b) 0,0274; 0,0038; 0,9962; 0,9726; 0,3933; 0,2066; 0,3225 e 0,1358.
    c) A aleatoriedade das respostas.

17. a) 0,1216.
    b) 0.
    c) 1.
    d) 0,9888.
    e) 0,1901.
    f) 0,6769.
    g) 0,0432.
    h) 18 e 1,8.
    i) 2 e 1,8.

18. a) 0,0352.
    b) 0,8329.
    c) 0,9389.

19. a) 0,9084.
    b) 0,0003.
    c) 0,0183.
    b) 0,9489

20. a) 0,0166.
    b) Sim.

21. a) 0,2617.
    b) 0,7383.
    c) 0,9961.

22. a) $0,1599$.

b) $0,1646$.

23. a) $\frac{1}{2}\binom{10}{7}(0,4)^7(0,6)^3 + \frac{1}{2}\binom{10}{7}(0,7)^7(0,3)^3$.

    b) 0,55.

24. $\dfrac{\frac{3^2}{2!}e^{-3}(0,75)}{\frac{3^2}{2!}e^{-3}(0,75) + \frac{5^2}{2!}e^{-5}(0,25)}$.

25. a) 0,4060.

    b) 0,4511.

    c) 0,1353.

    d) 0,4.

26. a) 0,6321.

    b) 0,9197.

    c) 0,2606.

    d) 0.7358.

27. a) 0,1429.

    b) As instalações deveriam atender no máximo quatro petroleiros por dia.

    c) 0,0361.

    d) 1,7819.

28. $k = 9$.

29. As probabilidades calculadas a partir da binomial e poisson são, respectivamente, 0,3758 e 0,4060.

30. a) 0,2834.

    b) 0,5926.

    c) 0,2792.

31. a) $1 - \frac{17}{2}e^{-3}$.

    b) $\dfrac{1 - \frac{17}{2}e^{-3}}{1 - e^{-3}}$.

32. 0 e 1

33. $p(1-p)^k$.