Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Probabilidade de Ruína em Tempo Finito de Processos de Risco via aproximações por Processos de Lévy α-estáveis.

por

Jhames Matos Sampaio

Brasília
2006

Dedico todo o esforço que resultou nesta dissertação

ao meu pai, José Antônio

à minha mãe, Maria José

e ao meu irmão, Jheyse...

Agradecimentos

Agradeço à professora Chang, pela confiança em mim depositada e orientação indispensável no decorrer do mestrado.

À professora Cátia, pelas ótimas aulas, simpatia e motivação do início ao fim do curso.

Ao professor Célius, que, desde meu primeiro contato com a matemática superior, foi meu maior incentivador.

Ao professor Ary, que desde aluno, me ajudou muito com sua experiência e tranquilidade.

Aos meus colegas do grupo de probabilidade: Débora, Adriana, Euro e à nossa adotada Juliana, que foram meus parceiros durante o curso.

Aos grandes e inesquecíveis amigos: Luís, Marcus e Luverci, pelos momentos de lazer, descontração e por estarem presentes nos melhores e piores momentos.

À minha família, que acreditou em mim e me deu seu apoio incondicional.

Agradeço também aos membros da comissão examinadora, por aceitar o convite em fazer parte da banca e por todas as sugestões, correções e comentários, que melhoraram o trabalho.

Em fim, a todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Matemática (UnB) que me acolheram.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a convergência fraca de processos estocásticos e apresentamos os limitantes superiores para a Probabilidade de Ruína em tempo finito de Furrer, Michna e Weron (1997). Em muitas situações práticas, envolvendo a teoria de risco, modelamos os processos de risco utilizando a teoria de caudas pesadas. Deste modo, faremos uso da teoria de processos de Lévy α-estáveis, que se mostra muito eficaz em situações como esta. Os limitantes são obtidos por meio de aproximações de processos de risco por sequências de processos de risco convergindo fracamente para processos de Lévy α-estáveis na topologia de Skorohod.

Palavras chave: Processos de Lévy α-estáveis; Probabilidade de Ruína em tempo finito; Topologia de Skorohod.

Abstract

In this work, we study the weak convergence of stochastic processes and present the upper bounds for the finite-time Ruin Probability of Furrer, Michna and Weron (1997). In many practical situations, involving the risk theory, we shape the risk processes using the heavy-tailed theory. In this way, we will make use of the α-stable Lévy motion theory, which is shown very efficient in these situations. The bounds are gotten by means of approaches of risk processes for sequencies of risk processes converging weakly to α-stable Lévy motion in Skorohod's Topology.

Key Words: α-stable Lévy motion; finite-time Ruin Probability; Skorohod's Topology.

Introdução

Neste trabalho vamos aproximar processos de risco por sequências de processos de risco que convergem fracamente para processos de Lévy α- estáveis. A referência básica deste trabalho é o artigo de Furrer, H., Michna, Z. e Weron, A. (1997), *Stable Lévy motion approximation in collective risk theory.* Insurance: Mathematics and Economics 20 (1997) 97-114. Vamos motivar abaixo o que é um processo de risco e sintetizar o estudo feito nos capítulos seguintes.

Antes da expressão matemática, vamos imaginar uma situação de risco e as variáveis associadas. Considere uma companhia de seguros que cobre seguros como acidentes, saúde e previdência. Os assegurados pagam regularmente uma certa quantia à companhia a qual denominamos prêmio. Os acidentes, mortes e aposentadorias, por exemplo, ocorrem num certo tempo aleatório e a esses incidentes denominamos sinistros. O prêmio pago pelo assegurado, ou prêmio de risco total, é calculado pela companhia de modo a cobrir dois componentes:

(i) Proteger a companhia de grandes desvios da média de sinistros.

(ii) Pagar a chegada de sinistros na média.

Representaremos por $u > 0$ a componente (i) e o chamaremos de reserva de risco inicial. Vamos supor que a componente (ii) é paga por unidade de tempo no valor $c > 0$. Supomos também que os sucessivos sinistros são saltos de um processo pontual $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ e que o valor das sucessivas indenizações pagas pelos sinistros, $\{Y_k : k \in \mathbb{N}\}$, formam uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Assim, um processo de risco $R = \{R(t) : t \geq 0\}$ tem a seguinte forma:

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k.$$

A probabilidade de ruína de uma companhia de seguros é a probabilidade de que o processo venha a se tornar negativo. Para isso, definimos o tempo de ruína da companhia como a primeira vez em que o processo R seja negativo, ou seja

$$T(R) = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\},$$

se $T(R) \neq \emptyset$, e $T(R) = \infty$ caso contrário.

De posse do tempo de ruína, definimos a probabilidade de ruína como

$$P\{T(R) < \infty\},$$

e a probabilidade de ruína a tempo finito como

$$P\{T(R) \leq t\},$$

que é a distribuição do tempo de ruína.

O objetivo do trabalho é obter limitantes superiores para a Probabilidade de Ruína em tempo finito, $P\{T(R) < t\}$. Faremos isso via aproximação de processos de risco por processos de Lévy α-estáveis.

Inicialmente, definimos uma sequência de processos $Q^{(n)}$ e mostramos que este processo converge fracamente para um processo $Q(t)$ que envolve a teoria de processos de Lévy α-estáveis. Em seguida, mostramos que o funcional T, tempo de ruína, definido acima, é contínuo quase certamente, e mostramos que $T(Q^{(n)})$ converge para $T(Q)$. Consequentemente,

$$\lim_{n \to \infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

A partir daí, obtemos os limitantes.

No caso clássico , $N(t)$ é um processo de Poisson e a probabilidade de ruína associada é conhecida. Neste trabalho não é necessário que $\{N(t) : t \geq 0\}$

seja um processo de Poisson. De forma mais abrangente, veremos que pode ser um processo de renovação arbitrário.

Como queremos aproximar a probabilidade de ruína por sequências de processos de risco, vamos considerar a sequência de processos $\{Q^{(n)}\}$ dada por

$$Q^{(n)}(t) = u^{(n)} + c^{(n)}t - \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k^{(n)}, \quad t \geq 0.$$

As sequências $u^{(n)}$ e $c^{(n)}$ são determinísticas, logo é natural a hipótese $u^{(n)} \to u > 0$ e $c^{(n)} \to c > 0$. Pensamos na sequência $\{Y_k^{(n)}\}$ como variáveis aleatórias do tipo $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$ onde $\{\phi(n)\}$ são constantes normalizantes. Seguem daí questões sobre Y_k e $\phi(n)$.

Se Y_k é tal que $E(Y_k) = \mu < \infty$ e $E(Y_k^2) = \sigma^2 + \mu^2 < \infty$, sabemos pelo Teorema do Limite Central que

$$\frac{1}{\sigma n^{1/2}} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mu) \overset{f}{\Longrightarrow} N(0, 1).$$

Onde $\overset{f}{\Longrightarrow}$ significa convergência fraca.

Isto nos traz algumas idéias para o caso particular $\phi(n) = \sigma n^{1/2}$, já que o Teorema de Donsker nos permite aproximar a soma

$$\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k.$$

pelo movimento Browniano B.

Juntamente com a idéia de divisibilidade infinita introduzida no Capítulo 1, a afirmação acima sugere que $\{Q^{(n)}\}$ converge para

$$Q(t) = u + ct - B(t).$$

Em muitas situações, as indenizações não possuem segundo momento finito, $E(Y_k^2) < \infty$, ou ainda, Y_k possui cauda pesada. Precisamos, portanto, de outros meios para aproximar $\{Q^{(n)}\}$. Assim, a teoria de distribuições estáveis, apresentada no Capítulo 1, torna-se promissora. De fato, em Furrer, Michna e Weron (1997), esta análise é feita mediante aproximação de processos de risco $\{Q^{(n)}\}$ por processos de Lévy α-estáveis. Apresentamos, então, no Capítulo 1, a teoria de distribuições estáveis e processos Lévy de α-estáveis. Neste capítulo surgem duas notações importantes. Primeiramente,

$$X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

para X estável, onde

$0 < \alpha \leq 2$: índice de estabilidade,

$\sigma > 0$: índice(parâmetro) de escala,

$|\beta| \leq 1$: parâmetro de assimetria ou viés,

μ: parâmetro de locação,

são constantes que aparecem na função característica de X. Em segundo lugar,

$$Z_\alpha(t),$$

que indica um processo de Lévy α-estável.

Para o estudo da convergência dos processos $\{Q^{(n)}\}$, apresentaremos no Capítulo 2 o espaço $D[0,1]$ e a topologia de Skorohod desse espaço como motivação para o mesmo estudo no espaço $D = D[0,\infty)$. Todos os processos deste trabalho estão no espaço D e como a teoria desse espaço é complexa, citamos os trabalhos de Stone (1963) e Lindvall (1973) que fazem a extensão de $D[0,1]$ para D. Ainda no Capítulo 2, apresentaremos alguns resultados sobre convergência fraca úteis no trabalho, dentre eles destacamos o Teorema 2.3.4 que é conhecido como Teorema da Aplicação Contínua e será muito útil no Capítulo 4.

No Capítulo 3, o principal resultado é o Teorema 3.0.5, onde mostramos que, sob certas condições, $\{Q^{(n)}\}$ converge para um processo estocástico $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ dado por

$$Q(t) = u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t)$$

onde, novamente, u e c são constantes positivas e $\{Z_\alpha(t) : t \geq 0\}$ é um processo de Lévy α-estável; a constante positiva λ é explicitada no Teorema 3.0.5.

Finalizamos com o Capítulo 4 onde obtemos alguns limitantes para a probabilidade de ruína a tempo finito. Fazemos isto mediante aproximação por processos de Lévy α-estáveis e utilizamos o estudo feito no Capítulo 3.

Primeiramente mostramos a convergência fraca

$$T(Q^{(n)}) \stackrel{f}{\Longrightarrow} T(Q)$$

e

$$\lim_{n \to \infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}$$

mostrando que o funcional T é contínuo quase certamente e utilizando o Teorema 2.3.4. A partir daí, conseguimos os limitantes superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito nos Teoremas 4.2.4 e 4.2.5.

Capítulo 1

Distribuições estáveis e Processos de Lévy α-estáveis

Neste capítulo apresentaremos a teoria inicial sobre distribuições estáveis e processos de Lévy α-estáveis. Como referências básicas deste capítulo citamos Breiman (1968), Feller (1966) e Samorodnitsky e Taqqu (1994).

Distribuições e processos gaussianos são há muito estudados e sua utilidade em modelos estocásticos é bem aceita. Entretanto, análises de finanças e seguros frequentemente indicam a presença de caudas pesadas, de modo que os processos estáveis se mostram como um recurso apropriado para modelos probabilísticos de cauda pesada. Dessa forma, a teoria apresentada neste capítulo será de suma importância ao desenvolvimento dos Capítulos 3 e 4, que tratam da probabilidade de ruína de processos de risco por aproximação de processos de Lévy α-estáveis.

Algumas novas terminologias serão apresentadas neste capítulo. Utilizaremos as notações $X \stackrel{d}{=} Y$ e $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$ para indicar que X e Y possuem a mesma distribuição e X_n converge para X em distribuição, respectivamente.

O teorema do limite central nos diz que se $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, onde $0 < EX_1^2 < \infty$, então existem sequências $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ com $c_n > 0$ tais que:

$$\frac{S_n - d_n}{c_n} \stackrel{d}{\Longrightarrow} Z \sim N(0,1),$$

onde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Questões imediatas seriam:

- O que acontece com $\frac{S_n - d_n}{c_n}$ em outras condições ?
- Haveria convergência? Em caso positivo, para que variável convergiria?

Se pensarmos que $\frac{S_n - d_n}{c_n} \stackrel{d}{=} X$, para $c_n > 0$ e d_n real, surge uma nova classe de distribuições, ou ainda, começamos a pensar num tipo de v.a. X que, nas condições acima, tenha a seguinte representação para $n \geq 2$:

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n. \tag{1.1}$$

De fato, vamos defini-la adiante como uma v.a. estável e frequentemente vamos nos referir às v.a.'s estáveis simplesmente por sua distribuição, ou seja, distribuição estável.

Em seguida, vamos definir um v.a. com distribuição simétrica. A teoria das v.a.'s com distribuição simétrica é de fundamental importância na teoria de distribuições estáveis, por isso dedicamos uma seção ao estudo de suas propriedades, Seção 1.1.

De posse da teoria de distribuições simétricas, estaremos aptos a nos aprofundarmos na teoria de distribuições estáveis, Seção 1.2. Nesta seção, apresentaremos as principais propriedades das distribuições estáveis dentre as quais dois tópicos devem ser destacados. Primeiramente, o Teorema 1.2.1, onde mostramos que c_n, na equação (1.1), é determinado e, sob certas condições, d_n também:

(a) Existe $0 \leq \alpha \leq 2$ único tal que $c_n = n^{1/\alpha}$,

(b) Se $\alpha \neq 1$, $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tal que $d_n = -b(n^{1/\alpha} - n)$.

Em segundo lugar apresentaremos a Definição 1.2.4 que introduz a principal notação para distribuições estáveis e mostraremos que esta definição é equivalente à primeira:

$$X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu).$$

As constantes

$0 < \alpha \leq 2$: índice de estabilidade,

$\sigma > 0$: índice (parâmetro) de escala,

$|\beta| \leq 1$: parâmetro de assimetria ou viés,

μ: parâmetro de locação,

surgem na função característica da v.a. X e motiva a notação acima:

$$\ln \Phi_X(t) = \begin{cases} it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta sinal(t) \tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)\right], & \text{se } \alpha \neq 1, \\ it\mu - \sigma|t| \left[1 + i\beta sinal(t) \ln(t)\right], & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

onde

$$sinal(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0, \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Na Seção 1.3, vamos estudar os processos de Lévy α-estáveis. Essa classe de processos é essencial à teoria apresentada nos Capítulos 3 e 4. Começamos definindo uma v.a. com distribuição infinitamente divisível e processos de Lévy, estudando assim a relação entre ambos. Em seguida definimos um processo (ou movimento) de Lévy α-estável donde surge a notação $Z_\alpha(t)$ para esse tipo de processo, notação esta que será utilizada em todo o trabalho:

$$Z_\alpha(t) \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma t^{1/\alpha}, \beta, 0),$$

onde $0 \leq \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$ e $|\beta| \leq 1$.

Finalizamos a seção definindo processos auto-similares e mostramos que os processos de Lévy α-estáveis são auto-similares.

Começamos o capítulo de fato definindo uma v.a. estável:

Definição 1.0.1. *Dizemos que uma variável aleatória X é estável se, para $n \geq 2$, existem um número positivo c_n e um número real d_n tais que:*

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n,$$

onde as v.a.'s X_i, $i = 1, \ldots, n$, são cópias independentes de X.

Exemplos:

(1) Seja Z uma v.a. com distribuição degenerada, isto é, $P(Z = c) = 1$ para alguma constante c, e $X_1, X_2, \ldots$ cópias independentes de Z. Então, as funções características satisfazem:

$$\Phi_Z(t) = E(e^{itc}) = e^{itc},$$

$$\Phi_{S_n}(t) = e^{itnc} \Longrightarrow \Phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \Phi_{S_n}(t/n) = e^{itc}.$$

Portanto, $\frac{S_n}{n} \stackrel{d}{=} Z$ ou $S_n \stackrel{d}{=} nZ$.

(2) Seja Z uma v.a. com distribuição $N(0,1)$ e $X_1, X_2, \ldots$ cópias independentes de Z.

Sabemos que $\Phi_Z(t) = e^{-t^2/2}$ de forma que

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \Phi_{S_n}(t/\sqrt{n}) = \left[e^{\frac{-(t/\sqrt{n})^2}{2}}\right]^n = e^{-t^2/2}.$$

Portanto $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} Z$ ou $S_n \stackrel{d}{=} \sqrt{n}Z$.

Se considerarmos $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, é fácil ver que $S_n \stackrel{d}{=} \sqrt{n}Z + (n\mu - \sqrt{n}\mu)$.

Se $d_n = 0$ na Definição 1.0.1, dizemos que a distribuição é estritamente estável.

Definição 1.0.2. *Dizemos que X tem distribuição simétrica se $X \stackrel{d}{=} -X$ ou $P(X \leq x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x)$.*

Na seção seguinte, estudaremos algumas propriedades das distribuições simétricas. Logo em seguida, faremos um estudo das distribuições estáveis. Como nas demonstrações de algumas propriedades das distribuições estáveis faremos uso de propriedades das distribuições simétricas, apresentaremos primeiramente algumas destas propriedades.

1.1 Propriedades das distribuições simétricas

Propriedade 1.1.1. *$X \stackrel{d}{=} F$, então F é simétrica se, e somente se, $\Phi_X(t)$ é real.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \int \cos(tx)dF(x) + i\int sen(tx)dF(x),\\ \Phi_{-X}(t) &= \int \cos(tx)dF(x) - i\int sen(tx)dF(x),\end{aligned}$$

então

$$\Phi_X(t) + \Phi_{-X}(t) = 2\int \cos(tx)dF(x) \tag{1.2}$$

Como $X \stackrel{d}{=} -X$, temos $\Phi_X(t) = \Phi_{-X}(t)$. Segue da equação (1.2) que,

$$\Phi_X(t) = \int \cos(tx)dF(x).$$

Portanto $\Phi_x(t) \in \mathbb{R}$.

Por outro lado $\Phi_x(t) \in \mathbb{R} \forall\ t$ se, e somente se, $\Phi_X(t) = \int \cos(tx)dF(x)$.

Da equação (1.2) segue que $\Phi_X(t) = \Phi_{-X}(t)$ ou ainda $X \stackrel{d}{=} -X$. ■

Propriedade 1.1.2. *Se U e V são independentes e simétricas então $U - V$ e $U + V$ também são simétricas.*

Demonstração. Nós temos que U é independente de $-V$, $-U$ é independente de V, $U \stackrel{d}{=} -U$ e $V \stackrel{d}{=} -V$.

Portanto $-U + V \stackrel{d}{=} U - V$, de onde segue que $U - V$ é simétrico. ∎

Propriedade 1.1.3. *Suponha $X_1, \cdots, X_n$ cópias independentes de X. Se X é simétrica, temos que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ é simétrica.*

Demonstração. A demonstração é análoga à da Propriedade 1.1.2.

Propriedade 1.1.4. *Se X é simétrica e EX existe, então $EX = 0$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
EX &= \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx \\
&= \int_0^\infty P\{X \geq x\}dx - \int_{-\infty}^0 P\{X \leq x\}dx \\
&= \int_0^\infty P\{X \geq x\}dx + \int_\infty^0 P\{X \leq -x\}dx \\
&= \int_0^\infty P\{X \geq x\}dx - \int_0^\infty P\{X \leq -x\}dx = 0
\end{aligned}$$

∎

Propriedade 1.1.5. *Seja X simétrica, se EX existe e X é estável ,então $S_n = X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X$.*

1.2 Propriedades das distribuições estáveis

Propriedade 1.2.1. *Se X é estável, $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ então $aX + b$ é estável.*

Demonstração. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ cópias independentes de X, c_n e d_n tais que $X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n$.

Então $aX_1 + b, aX_2 + b, \ldots$ são cópias independentes de $aX + b$ de forma que

$$a(X_1 + \cdots + X_n) + nb \stackrel{d}{=} a(c_n X + d_n) + nb \stackrel{d}{=} c_n(aX + b) + ad_n - c_n b + nb.$$

Propriedade 1.2.2. *Se X é estável então $-X$ é estável.*

A Propriedade 1.2.2 é um caso particular da Propriedade 1.2.1.

Propriedade 1.2.3. *Se X é estável e $X_1, X_2, \cdots$ são cópias independentes de X então $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ é estável.*

Demonstração. Seja

$$S_{mn} = X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} + \cdots + X_{2n} + \cdots + X_{(m-1)n+1} + \cdots + X_{mn}.$$

Defina

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 + \cdots + X_n, \\
Y_2 &= X_{n+1} + \cdots + X_{2n}, \\
&\vdots \\
Y_m &= X_{(m-1)n+1} + \cdots + X_{mn},
\end{aligned}
$$

onde $Y_1, \ldots, Y_m$ são cópias independentes de S_n. Também,

$$S_{mn} = X_1 + \cdots + X_m + X_{m+1} + \cdots + X_{2m} + \cdots + X_{(n-1)m+1} + \cdots + X_{nm},$$

e defina

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= X_1 + \cdots + X_m, \\
Z_2 &= X_{m+1} + \cdots + X_{2m}, \\
&\vdots \\
Z_n &= X_{(n-1)m+1} + \cdots + X_{nm},
\end{aligned}
$$

onde $Z_1, \ldots, Z_n$ são cópias independentes de S_m.

Agora, sejam $U_1, U_2, \ldots$ cópias independentes de X, então $Z_j \stackrel{d}{=} c_m X + d_m \stackrel{d}{=} c_m U_j + d_m$.

Assim,

$$\begin{aligned} S_{mn} &= Y_1 + \cdots + Y_m = Z_1 + \cdots + Z_n \\ &\overset{d}{=} c_m(U_1 + \cdots + U_n) + nd_m \\ &\overset{d}{=} c_m S_n + d_m \end{aligned}$$

Portanto S_n é estável. ■

Propriedade 1.2.4. *Se X é estável e independente de Y com $Y \overset{d}{=} X$, então $X - Y$ é estável e simétrica.*

Demonstração. Considere

(I) $X_1 + \cdots + X_n \overset{d}{=} c_n X + d_n$

(II) $Y_1 + \cdots + Y_n \overset{d}{=} c_n Y + d_n$

Como X e Y são independentes, subtraindo (II) de (I) segue que,

$$(X_1 - Y_1) + \cdots + (X_n - Y_n) \overset{d}{=} c_n(X - Y).$$

Portanto $X - Y$ é estável.

Para mostrar a simetria, basta inverter a subtração. ■

Agora faremos uma análise dos coeficientes c_n e d_n. De fato, eles são determinados.

Teorema 1.2.1. *Seja X uma v.a. com distribuição F estável não degenerada e sejam $X_1, \ldots, X_n$ cópias independentes de X. Então,*

(i) Existe $0 \leq \alpha \leq 2$ único tal que $c_n = n^{1/\alpha}$, isto é, $S_n = X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + d_n$.

(ii) Se $\alpha \neq 1$, existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que $d_n = -b(n^{1/\alpha} - n)$ e b é tal que $X - b$ possui distribuição estritamente estável.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração do item (i) em algumas etapas:

$(i1)$ Tome $Y \stackrel{d}{=} X$, X e Y independentes.

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ cópias independentes de X, e $Y_1, \ldots, Y_n$ cópias independentes de Y. Segue assim que

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n$$

e

$$Y_1 + \cdots + Y_n \stackrel{d}{=} c_n Y + d_n.$$

Temos então, pela independência, que

$$(X_1 - Y_1) + \cdots + (X_n - Y_n) \stackrel{d}{=} c_n (X - Y).$$

Como $(X - Y)$ tem distribuição simétrica e mesmo coeficiente c_n podemos simplificar o teorema para o caso simétrico, isto é, X é tal que:

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X.$$

$(i2)$ Seja $X \stackrel{d}{=} F$, F estável e simétrica. Vamos mostrar que $\{c_n\}$ satisfaz:

$$\begin{cases} c_{m+n} X \stackrel{d}{=} c_m X_1 + c_n X_2, \\ c_{mn} = c_m c_n. \end{cases}$$

Considere $S_{m+n} = X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} + \cdots + X_{m+n}$, e defina

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

e

$$S_{m+n} - S_n = X_{n+1} + \cdots + X_{m+n}.$$

Temos, então, pela independência

$$\begin{cases} S_n \stackrel{d}{=} c_n X \stackrel{d}{=} c_n X_2, \\ S_{m+n} - S_n \stackrel{d}{=} c_m X \stackrel{d}{=} c_m X_1. \end{cases}$$

Portanto

$$S_{m+n} \stackrel{d}{=} c_m X_1 + c_n X_2 \stackrel{d}{=} c_{m+n} X.$$

Resumindo,

$$c_{m+n}X \stackrel{d}{=} c_m X_1 + c_n X_2.$$

Se $m = n$,

$$c_{2n}X \stackrel{d}{=} c_n X_1 + c_n X_2 = c_n(X_1 + X_2) = c_n c_2 X.$$

Logo $c_{2n} = c_2 c_n$.

Mostra-se facilmente, por indução, que $c_{mn} = c_m c_n$.

$(i3)$ Agora um candidato que se torna natural é $c_n = n^{1/\alpha}$. Mais que isso, $0 < \alpha \leq 2$ é único.

Dado $k \in \mathbb{N}$, seja $c_k = k^{1/\alpha}$, onde $\alpha = \frac{\log k}{\log c_k}$.

Se $n = k^l$, $c_n = c_{k^l} = c_k^l = \left(k^{1/\alpha}\right)^l = \left(k^l\right)^{1/\alpha} = n^{1/\alpha}$.

Se $v = m^i$ e $v \neq k^l$, $\forall\ l$, então $c_m = m^{1/\beta}$ e $c_v = v^{1/\beta}$.

Devemos mostrar que $\alpha = \beta$.

Seja j tal que $k^j < m^i < k^{j+1}$. Então,

$$k^{j/\beta} < (m^i)^{1/\beta} < k^{1/\beta}k^{j/\beta}$$

e

(1.3) $$c_{k^j}^{\alpha/\beta} < c_v < k^{1/\beta} c_{k^j}^{\alpha/\beta}.$$

Para isto, observe que $k^{j/\beta} = \left[(k^j)^{1/\alpha}\right]^{\alpha/\beta}$.

Segue da Equação (1.3) que

$$1 < k^{1/\beta} \frac{c_{k^j}}{c_v} c_{k^j}^{(\alpha/\beta - 1)}.$$

Como $c_{k^j} \to \infty$, segue que $\alpha \geq \beta$. Invertendo os papéis de m e k, obtemos $\alpha \leq \beta$ e, portanto, $\alpha = \beta$.

$(i4)$ Vamos mostrar agora que $\alpha > 0$.

$\alpha = 0$ implica claramente uma indeterminação. Suponha $\alpha < 0$, como $c_m > 0$, temos

(1.4) $$P\{|X| > z\} = P\{|c_m X| > c_m z\} = P\{|S_m| > c_m z\}.$$

Mas o evento $\{|S_m| > c_m z\}$ contém o evento abaixo:

$$\left\{ \left(\max_{1 \leq j \leq m} |X_j| > c_m z,\ S_m - \max_{1 \leq j \leq m} |X_j| \geq 0 \right) \bigcup \left(\max_{1 \leq j \leq m} |X_j| < -c_m z,\ S_m - \max_{1 \leq j \leq m} |X_j| \leq 0 \right) \right\}.$$

Logo, pela Equação (1.4), temos

$$P\{|X| > z\} \geq \frac{1}{2} P\left\{\max_{1 \leq j \leq m} |X_j| > c_m z\right\} \geq \frac{1}{2} P\{|X| > c_m z\}.$$

Como $\alpha < 0$, $c_m = m^{1/\alpha} \to 0$, quando $m \to \infty$.

Assim, temos que $P\{|X| > z\} \geq \dfrac{1}{2}$, $\forall\ z > 0$, o que é uma contradição.

$(i5)$ Resta mostrar apenas que $\alpha \leq 2$.

Suponha que $\alpha > 2$.

$$\begin{aligned}
P\{|S_n| > c_n z\} &\leq \frac{1}{2} P\left\{\max_{1 \leq j \geq n} |X_j| > c_n z\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - P^n\{|X| \leq c_n z\}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - e^{-n(1 - P\{|X| \leq c_n z\})}\right).
\end{aligned}$$

Onde a última desigualdade segue do resultado conhecido,

$$(1 - x^n) \geq 1 - e^{-n(1-x)}, \quad 0 < x < 1.$$

Podemos escolher um $z \in \mathbb{R}$ tal que $P\{|S_n| > c_n z\} < 1/4$, $\forall\ n$. Segue assim que $n(1 - P\{|X| \leq c_n z\})$ permanece limitado, ou seja, $\exists\ M < \infty$ tal que $n(1 - P\{|X| \leq c_n z\}) \leq M$.

Em particular, se $n = m^\alpha$ e $z = 1$, então $m^\alpha(1 - P\{|X| \leq M\}) \leq M < \infty$ e, portanto, $EX^2 < \infty$, o que é uma contradição (Ver lema 2, V.6, Feller (1966), Vol .II).

(ii)

$$\begin{cases} S_n \overset{d}{=} c_n X_1 + d_n, \\ S_{2n} - S_n \overset{d}{=} c_n X_2 + d_n, \\ \vdots \\ S_{mn} - S_{(m-1)n} \overset{d}{=} c_n X_m + d_n. \end{cases}$$

Segue por independência que

$$S_{mn} \overset{d}{=} c_n(X_1 + \cdots + X_m) + md_n \overset{d}{=} c_n c_m X + c_n d_m + md_n.$$

Analogamente, obtemos $S_{mn} \overset{d}{=} c_m c_n X + c_m d_n + nd_m$, de forma que $(c_n - n)d_m = (c_m - m)d_n$.

Sendo assim, basta tomarmos $d_n = -b(n^{1/\alpha} - n)$.

Como X é estável, é fácil mostrar que $X - b$ é estritamente estável. De fato, sabendo que $c_n = n^{1/\alpha}$ e $d_n = -b(n^{1/\alpha} - n)$ para algum $b \in \mathbb{R}$, então

$$c_n X + d_n \overset{d}{=} X_1 + \cdots + X_n$$

ou

$$
\begin{aligned}
& n^{1/\alpha}X - n^{1/\alpha}b + nb \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n - nb + nb \\
\Longrightarrow\ & n^{1/\alpha}(X-b) + nb \stackrel{d}{=} (X_1 - b) + \cdots + (X_n - b) + nb \\
\Longrightarrow\ & n^{1/\alpha}(X-b) \stackrel{d}{=} (X_1 - b) + \cdots + (X_n - b).
\end{aligned}
$$

■

Corolário 1.2.1. *Se X possui distribuição estritamente estável, então, para algum $0 < \alpha \leq 2$, temos:*

$$s^{1/\alpha}X_1 + t^{1/\alpha}X_2 \stackrel{d}{=} (s+t)^{1/\alpha}X, \quad s > 0,\ t > 0.$$

Exemplos:

(1) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então temos $c_n = n^{1/2}$ e $d_n = -\mu(\sqrt{n} - n)$

ou ainda

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} \sqrt{n}X - \mu(\sqrt{n} - n).$$

(2) Se $\alpha = 1$ e X tem distribuição de Cauchy,

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}, \quad \forall\ x,$$

$$\Phi_X(t) = e^{it\mu - \sigma|t|}$$

e

$$\Phi_{S_n}(t) = e^{itn\mu - n\sigma|t|}.$$

De forma que,

$$\Phi_{nX}(t) = \Phi_X(nt) \Longrightarrow X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} nX$$

Observe que X não é simétrica, pois $\mu \neq 0$.

Definição 1.2.1. *Dizemos que X tem distribuição estável se dados $a > 0$ e $b > 0$, X_1 e X_2 cópias independentes de X, existem $c > 0$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que*

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d. \tag{1.5}$$

Se $d = 0$, dizemos que X tem distribuição estritamente estável.

Proposição 1.2.1. *A Definição 1.0.1 é equivalente à Definição 1.2.1.*

Demonstração. Se X é estritamente estável, pela Definição 1.0.1 e pelo Corolário 1.2.1, temos, para $s = a^\alpha$ e $t = b^\alpha$, que $aX_1 + bX_2 = cX$, $c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} > 0$. Se X não é estritamente estável, seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $X - b$ é estável . Então, do Corolário 1.2.1 segue que

$$s^{1/\alpha}(X_1 - b) + t^{1/\alpha}(X_2 - b) \stackrel{d}{=} (s+t)^{1/\alpha}(X - b).$$

Tomando novamente $s = a^\alpha$ e $t = b^\alpha$, temos

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}X - b\left[(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} - (a+b)\right].$$

Por outro lado, suponha válida a Definição 1.2.1. Para $n = 2$, tomando $a = 1$ e $b = 1$, temos

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} c_2 X + d_2.$$

Suponha, por indução, que para $n = k$, temos

$$S_k \stackrel{d}{=} c_k X + d_k.$$

Para $n = k+1$, faça $X_{k+1} \stackrel{d}{=} Y$ onde $Y \stackrel{d}{=} X$, X e Y independentes. Então por independência,

$$S_{k+1} \stackrel{d}{=} Y + c_k X + d_k \stackrel{d}{=} c_{k+1}X + d_{k+1}.$$

■

Definição 1.2.2. *Dada uma variável aleatória X com função distribuição F, definimos o domínio de atração de F:*

$$\mathbb{D}(F) = \left\{ G : G \text{ f.d. tal que para } X_i \stackrel{d}{=} G,\ i \geq 1,\ \text{existem } a_n \text{ e } b_n \text{ tais que } \frac{S_n - b_n}{a_n} \stackrel{d}{\Longrightarrow} X \right\}.$$

Definição 1.2.3. *Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição estável se $\mathbb{D}(F) \neq \emptyset$.*

Desejamos mostrar a equivalência entre as Definições 1.0.1 e 1.2.3. Para tal, necessitaremos do lema abaixo.

Lema 1.2.1. *Seja V uma variável aleatória não degenerada.*

Se $U_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} V$ e $A_nU_n + B_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} V'$, onde A_n e B_n são constantes, então $A_n \to A > 0$, $B_n \to B$ quando $n \to \infty$ e $V' = AV + B$.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em 4 partes.

Observe inicialmente a seguinte igualdade:

$$\Phi_{A_nU_n+B_n}(t) = e^{itB_n}\Phi_{U_n}(A_nt)$$

$$\Longrightarrow \quad |\Phi_{A_nU_n+B_n}(t)| = |\Phi_{U_n}(A_nt)|$$

Defina $\alpha_n(t) = \Phi_{A_nU_n+B_n}(t)$ e $\beta_n(t) = \Phi_{U_n}(A_nt)$.

(i) $\{A_n\}$ não diverge.

De fato, suponha que existe um subsequência $\{A_{n'}\}$ tal que $A_{n'} \to +\infty$ quando $n' \to \infty$. Então,

$$|\alpha_{n'}(t)| \to |\Phi_{V'}(t)|\,, \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Tome $t_{n'} = \frac{\mu}{A_{n'}}$ e $|\alpha_{n'}(t_{n'})| \to |\Phi_{V'}(0)| = 1$ quando $n \to \infty$.

Mas $|\alpha_{n'}(t_{n'})| = |\beta_{n'}(t_{n'})| \to |\Phi_V(\mu)|$ quando $n \to \infty$.

Logo $|\Phi_V(\mu)|\,|\Phi_{V'}(0)| = 1$, de forma que V é degenerada, o que contradiz nossa hipótese.

(ii) Se $A_{n'}$ é convergente, então $A_{n'} \to A > 0$ quando $n \to \infty$.

Se $A = 0$, então $|\Phi_{U_n}(A_n t)| \to |\Phi_V(0)| = 1$ quando $n \to \infty$. Novamente contradizendo a hipótese.

(iii) Sejam $A_{n'} \to A > 0$ e $A_{n''} \to \overline{A} > 0$.

Vamos mostrar que $A = \overline{A}$.

Como $\Phi_{U_n}(t)$ converge, nós temos $\Phi_V(At) = \Phi_V(\overline{A}t)$.

Desse modo, $\Phi_V(t) = \Phi_V\left(A\frac{t}{a}\right) = \Phi_V\left(\frac{\overline{A}}{A}t\right)$.

Seja $\overline{A} < A$. Então

$$|\Phi_V(t)| = \left|\Phi_V\left(\frac{\overline{A}}{A}t\right)\right| = \left|\Phi_V\left(\left(\frac{\overline{A}}{A}\right)^2 t\right)\right| = \cdots = \left|\Phi_V\left(\left(\frac{\overline{A}}{A}\right)^k t\right)\right| \to |\Phi_V(0)| = 1,$$

quando $k \to \infty$. Temos assim uma contradição. Segue que $\lim_{n\to\infty} A_n = A > 0$.

(iv) Como $A_n \to A$, a sequência $\{B_n\}$ não pode divergir, pois $A_n U_n + B_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} V'$.

Se $B_{n'} \to B$ e $B_{n''} \to \overline{B}$, então

$$\begin{cases} \Phi_{A_{n'}U_{n'}+B_{n'}}(t) \to e^{itB}\Phi_V(At), \\ \Phi_{A_{n''}U_{n''}+B_{n''}}(t) \to e^{it\overline{B}}\Phi_V(At). \end{cases}$$

Portanto $B = \overline{B}$.

■

Proposição 1.2.2. *A Definição 1.0.1 e a Definição 1.2.3 são equivalentes.*

Demonstração. F é estável pela Definição 1.0.1, então $X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n$ com $c_n > 0$, ou seja

$$\frac{S_n - d_n}{c_n} \stackrel{d}{=} X.$$

Portanto, $F \in \mathbb{D}(F) \Longrightarrow \mathbb{D}(F) \neq \emptyset$.

Por outro lado, assuma a Definição 1.2.3. Logo, para X não degenerada com distribuição F existe $G \in \mathbb{D}(F)$.

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ cópias independentes de G.

$$S_{mn} = Y_1 + \cdots + Y_{mn},$$

e defina

$$\begin{aligned} S_n &= Y_1 + \cdots + Y_n, \\ S_{2n} - S_n &= Y_{n+1} + \cdots + Y_{2n}, \\ &\vdots \\ S_{mn} - S_{(m-1)n} &= Y_{(m-1)n+1} + \cdots + Y_{mn}. \end{aligned}$$

Sejam também $X_1, X_2, \cdots, X_n$ cópias independentes de X.

Temos $G \in \mathbb{D}(F)$, $Y_j \stackrel{d}{=} G$ e $X_i \stackrel{d}{=} F$.

$$\begin{aligned} \frac{S_n - b_n}{a_n} &\stackrel{d}{\Longrightarrow} X_1 \\ \frac{(S_{2n} - S_n) - b_n}{a_n} &\stackrel{d}{\Longrightarrow} X_2 \\ &\vdots \\ \frac{\big(S_{mn} - S_{(m-1)n}\big) - b_n}{a_n} &\stackrel{d}{\Longrightarrow} X_m \end{aligned}$$

e por independência

$$\frac{S_{mn} - mb_n}{a_n} \stackrel{d}{\Longrightarrow} X_1 + \cdots + X_m.$$

Mas,

$$\frac{S_{mn} - b_{mn}}{a_{mn}} \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$$

e

$$\frac{S_{mn} - mb_n}{a_n} = \frac{a_{mn}}{a_n}\left(\frac{S_{mn} - b_{mn}}{a_{mn}}\right)\frac{1}{a_n}(b_{mn} - mb_n).$$

Sabemos que $U_n \overset{d}{\Longrightarrow} X$ e $A_n U_n + B_n \overset{d}{\Longrightarrow} X_1 + \cdots + X_m$.

Portanto, pelo Lema 1.2.1, $A_n = \frac{a_{mn}}{a_n} \to c_m > 0$, $B_n = \frac{1}{a_n}(b_{mn} - mb_n) \to d_m \in \mathbb{R}$ quando $n \to \infty$, e $X_1 + \cdots + X_m \overset{d}{=} c_m X + d_m$.

$\blacksquare$

Definição 1.2.4. *Dizemos que X tem distribuição estável se existirem constantes*

$0 < \alpha \leq 2$*: índice de estabilidade,*

$\sigma > 0$*: índice(parâmetro) de escala,*

$|\beta| \leq 1$*: parâmetro de assimetria ou viés,*

μ*: parâmetro de locação,*

tais que a função característica de X é dada por

$$\ln \Phi_X(t) = \begin{cases} it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta sinal(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right], & se \quad \alpha \neq 1, \\ it\mu - \sigma|t|\left[1 + i\beta sinal(t)\ln(t)\right], & se \quad \alpha = 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

onde

$$sinal(t) = \begin{cases} 1 & se \quad t > 0, \\ 0 & se \quad t = 0, \\ -1 & se \quad t < 0. \end{cases}$$

Notação: $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Pode-se mostrar que a Definição 1.0.1 e a Definição 1.2.4 são equivalentes, ver Breiman (1968). No entanto, esta demonstração será omitida neste texto.

Proposição 1.2.3. *A Definição 1.0.1 e a Definição 1.2.4 são equivalentes.*

Exemplo: Tome uma v.a. X com distribuição $N(\mu, 2\sigma^2)$.

$$\ln(\Phi_X(t)) = it\mu - \sigma^2 t^2.$$

Portanto, por (1.6)

$$X \stackrel{d}{=} S_2(\sigma, \beta, \mu).$$

Por outro lado, se tomarmos $\alpha = 2$ em (1.2.4), obtemos a função característica da normal com média μ e variância $2\sigma^2$.

Propriedade 1.2.5. *Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com $X_i \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$. Então $X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, onde*

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha},\ \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha},\ \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar para $\alpha \neq 1$.

Por independência

$$
\begin{aligned}
& \ln[E(exp(it(X_1+X_2))] \\
= \ & \ln[E(exp(itX_1))] + \ln[E(exp(itX_2))] \\
= \ & it(\mu_1+\mu_2) - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)\,|t|^\alpha + i|t|^\alpha sinal(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha) \\
= \ & it(\mu_1+\mu_2) - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)\,|t|^\alpha \left[1 - i\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} sinal(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

A prova para $\alpha = 1$ é análoga. ■

Propriedade 1.2.6. *Seja $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e seja a uma constante real. Então $X + a \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.*

A demonstração da Propriedade 1.2.6 segue imediatamente da função característica da Definição 1.2.4.

Propriedade 1.2.7. *Seja $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e a uma constante real não nula. Então*

$$
\begin{aligned}
& aX \stackrel{d}{=} S_\alpha(|a|\sigma,\ sinal(a)\beta,\ a\mu), && se\ \alpha \neq 1, \\
& aX \stackrel{d}{=} S_1\left(|a|\sigma,\ sinal(a)\beta,\ a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln|a|)\sigma\beta\right), && se\ \alpha = 1.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Pela Definição 1.2.4, temos para $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}
&\ln[E(exp(itaX))] \\
&= i\mu(ta) - |ta|^{\alpha}\sigma^{\alpha}\left(1 - i\beta sinal(at)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \\
&= i(\mu a)t - (\sigma|a|)^{\alpha}|t|^{\alpha}\left(1 - i\beta sinal(a)sinal(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

A demonstração para $\alpha = 1$ é análoga.

■

Propriedade 1.2.8. *Para todo* $0 < \alpha < 2$,

$$X \stackrel{d}{=} S_{\alpha}(\sigma, \beta, 0) \Longleftrightarrow -X \stackrel{d}{=} S_{\alpha}(\sigma, -\beta, 0).$$

A demonstração da Propriedade 1.2.8 segue trivialmente da função característica da Definição 1.2.4.

Propriedade 1.2.9. $X \stackrel{d}{=} S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$ *é simétrica se, e somente se,* $\beta = 0$ *e* $\mu = 0$. *É simétrica em relação a* μ *se, e somente se,* $\beta = 0$.

Demonstração. Pela Propriedade 1.1.1, basta mostrar que a função característica é real. Pela Definição 1.2.4, este caso ocorre somente se $\beta = 0$ e $\mu = 0$. Da Propriedade 1.2.6 segue a segunda afirmação.

■

Propriedade 1.2.10. *Seja* $X \stackrel{d}{=} S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$ *com* $\alpha \neq 1$. *Então* X *é estritamente estável se, e somente se,* $\mu = 0$.

Demonstração. Sejam X_1 e X_2 cópias independentes de X e sejam A e B constantes positivas arbitrárias. Pelas Propriedades 1.2.5 e 1.2.7,

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} S_\alpha \Big(\sigma \left(A^\alpha + B^\alpha\right)^{1/\alpha},\ \beta,\ \mu(A+B)\Big).$$

Devemos fazer $c = \left(A^\alpha + B^\alpha\right)^{1/\alpha}$ em (1.5) na Definição 1.2.1. Pelas Propriedades 1.2.6 e 1.2.7,

$$cX + d \stackrel{d}{=} S_\alpha \Big(\left(A^\alpha + B^\alpha\right)^{1/\alpha},\ \beta,\ \mu \left(A^\alpha + B^\alpha\right)^{1/\alpha} + d\Big).$$

Portanto, nós temos $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} cX + d$ com $d = 0$ se, e somente se, $\mu = 0$.

■

Propriedade 1.2.11. $X \stackrel{d}{=} S_1(\sigma, \beta, \mu)$ *é estritamente estável se, e somente se,* $\beta = 0$.

Demonstração. Sejam X_1 e X_2 cópias independentes de X e $A > 0$, $B > 0$ constantes reais arbitrárias. Pelas Propriedades 1.2.5 e 1.2.7,

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} S_1 \left((A+B)\sigma,\ \beta,\ (A+B)\mu - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(A \ln A + B \ln B)\right)$$

enquanto,

$$(A+B)X \stackrel{d}{=} S_1 \left((A+B)\sigma,\ \beta,\ (A+B)\mu - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(A+B)\ln(A+B)\right).$$

Portanto, $d = 0$ em (1.5) se, e somente se, $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} (A+B)X$, isto é, se, e somente se,

$$\beta(A \ln A + B \ln B) = \beta(A+B)\ln(A+B),$$

para quaisquer $A > 0$ e $B > 0$. É necessário e suficiente que $\beta = 0$.

■

1.3 Processos de Lévy α-estáveis

Nesta seção, apresentaremos a definição e algumas propriedades básicas dos processos Lévy α-estáveis. Inicialmente vamos apresentar o conceito de uma variável aleatória com distribuição infinitamente divisível.

Definição 1.3.1. *Uma variável aleatória X tem distribuição infinitamente divisível se para todo $n \in \mathbb{N}$ existem variáveis aleatórias $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \cdots, X_n^{(n)}$ i.i.d. tais que*

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}.$$

Daqui em diante diremos que X é infinitamente divisível se X tiver distribuição infinitamente divisível.

Definição 1.3.2. *Um processo estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ com valores em $\mathbb{R}^d$ é dito um processo de Lévy se :*

(i) $P\{X(0)=0\}=1$ *ou* $X(0)=0$ *q.c.*

(ii) X *tem incrementos independentes, isto é,* $X(t_1), X(t_2)-X(t_1), \dots,$ $X(t_k)-X(t_{k-1})$ *são independentes para* $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k$.

(iii) X *é temporalmente homogêneo, isto é,* $X(t+h)-X(t) \stackrel{d}{=} X(h), \forall\, t>0$.

(iv) X *é estocasticamente contínua, isto é,* $\lim\limits_{t \to t_0} P\{|X(t)-X(t_0)|>\epsilon\}=0$.

(v) Para quase todo ω, $X(t,\omega)$ *é uma trajetória contínua à direita com limite à esquerda.*

Observações:

(1) Pode-se provar que, se temos de (i) a (iv), então existe uma versão $\overline{X}$ satisfazendo (v).

(2) As condições (i), (ii) e (iii) equivalem a um processo estacionário com incrementos independentes.

Proposição 1.3.1. *Se* X *é um processo de Lévy, então* $X(t)$ *possui distribuição infinitamente divisível.*

Demonstração. Para $t>0$, tomando $t_0=0$ e $t_k=t$, temos

$$
\begin{aligned}
X(t) &\overset{d}{=} (X(t_1) - X(t_0)) + (X(t_2) - X(t_1)) + \cdots + (X(t_k) - X(t_{k-1})) \\
&\overset{d}{=} X(t_k) - X(t_0) \overset{d}{=} X(t) - X(0).
\end{aligned}
$$

fazendo $t_j = \dfrac{jt}{k}$, $j = 0, \cdots, k$

$$X(t_j) - X(t_{j-1}) \overset{d}{=} X(t_1)$$

são independentes.

Portanto, $X(t)$ tem distribuição infinitamente divisível. ■

Definição 1.3.3. *Dizemos que X é um processo de Lévy se X for estacionário com incrementos independentes e $X(1)$ possuir distribuição infinitamente divisível.*

Pode-se demonstrar que as Definições 1.3.2 e 1.3.3 são equivalentes. Enunciamos o teorema abaixo.

Teorema 1.3.1. *Se ξ é uma variável aleatória com distribuição infinitamente divisível, então existe um processo estocástico X que satisfaz de (i) a (iv).*

Definição 1.3.4. *Dizemos que $Z_\alpha = \{Z_\alpha(t) : t \leq 0\}$ é um processo (movimento) de Lévy α-estável se:*

(i) $P\{Z_\alpha(0) = 0\} = 1$ *ou* $Z_\alpha(0) = 0$ *q.c.*

(ii) Z_α *possui incrementos independentes.*

(iii) $Z_\alpha(t+h)-Z_\alpha(t) \stackrel{d}{=} S_\alpha\left(\sigma h^{1/\alpha}, \beta, 0\right)$ *para* $0 \leq t, h < \infty$, *onde* $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$ *e* $|\beta| \leq 1$.

Definição 1.3.5. *Um processo* Z_α *iniciado em* 0, *com incrementos independentes e estacionários, é dito Lévy* α*-estável se*

$$Z_\alpha(1) \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, 0).$$

Proposição 1.3.2. *A Definição 1.3.4 é equivalente à Definição 1.3.5.*

Demonstração. Primeiramente, vamos considerar o processo Z_α da Definição 1.3.4. Pela condição (iii), temos incrementos estacionários. Logo, tomando $t = 1$ e $h = 0$, temos

$$Z_\alpha(1) \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, 0).$$

Agora consideremos a Definição 1.3.5. As condições (i) e (ii) já estão satisfeitas, então basta mostrar a condição (iii).

Nós temos que

$$Z_\alpha(0) = 0$$

e

$$Z_\alpha(1) \overset{d}{=} Z_\alpha(1) - Z_\alpha(0) \overset{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, 0).$$

Pela Propriedade 1.2.5, temos, para U e V independentes, que se

$$U \overset{d}{=} S_\alpha\left(\sigma_U, \beta_U, 0\right) \quad \text{e} \quad V \overset{d}{=} S_\alpha\left(\sigma_V, \beta_V, 0\right)$$

então

$$U + V \overset{d}{=} S_\alpha\left(\left(\sigma_U^\alpha + \sigma_V^\alpha\right)^{1/\alpha}, \frac{\beta_U \sigma_U^\alpha + \beta_V \sigma_V^\alpha}{\sigma_U^\alpha + \sigma_V^\alpha}, 0\right).$$

Dessa forma, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

$$Z_\alpha(n) \overset{d}{=} Z_\alpha(n) - Z_\alpha(n-1) + Z_\alpha(n-1) - Z_\alpha(n-2) + \cdots + Z_\alpha(1) - Z_\alpha(0).$$

Como o processo Z_α tem, por hipótese, incrementos independentes e estacionários, para cada $o \leq i \leq n$, temos $Z_\alpha(i) - Z_\alpha(i-1) \overset{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$. Portanto, $Z_\alpha(n) \overset{d}{=} S_\alpha\left(\sigma n^{1/\alpha}, \beta, 0\right)$.

Também temos,

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha(1) &= Z_\alpha\left(\frac{1}{m}m\right) \stackrel{d}{=} S_\alpha\left(\frac{\sigma_1}{m}m^{1/\alpha}, \beta, 0\right) \\
&\Longrightarrow \frac{\sigma_1}{m} = \sigma\left(\frac{1}{m}\right)^{1/\alpha} \\
&\Longrightarrow Z_\alpha\left(\frac{1}{m}\right) \stackrel{d}{=} S_\alpha\left(\sigma\left(\frac{1}{m}\right)^{1/\alpha}, \beta, 0\right).
\end{aligned}
$$

Usamos argumentos semelhantes para obter o resultado para os racionais e reais.

■

Definição 1.3.6. *Um processo X é dito auto-similar se, dado $a > 0$, existir um $b > 0$ tal que*

$$\{X(at) : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{bX(t) : t \geq 0\}.$$

Proposição 1.3.3. *Todo processo Lévy α-estável é auto-similar.*

Demonstração. Pela Propriedade 1.2.7, temos, para $c > 0$, que

$$\{Z_\alpha(ct) : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \left\{c^{1/\alpha} Z_\alpha(t) : t \geq 0\right\}.$$

■

Como exemplo vamos tomar o movimento Browniano $B = \{B(t) : t \geq 0\}$.

Sabemos que B é um processo estocástico com incrementos independentes e estacionários. Sabemos também que

$$B(1) \overset{d}{=} N(0, \sigma^2) \overset{d}{=} S_2(\sigma/\sqrt{2}, 0, 0).$$

Portanto, pela Definição 1.3.5, B é um processo de Lévy 2-estável e pela Proposição 1.3.3 é auto-similar, com

$$B(t) \overset{d}{=} t^{1/2} B(1), t > 0.$$

Capítulo 2

Espaço D e Convergência Fraca

Vamos introduzir neste capítulo a idéia básica do espaço D no intervalo $[0, 1]$, podendo ser extendido para o intervalo $[0, \infty)$. A intenção deste capítulo é tornar a leitura que se segue na dissertação mais clara e agradável, com as ferramentas iniciais para se entender esse espaço não tão corriqueiro. Para maiores detalhes sobre o espaço D, ver Billingsley (1968).

2.1 O espaço $D[0, 1]$

O espaço $D = D[0, 1]$ consiste das funções x em $[0, 1]$ que são contínuas à direita e possuem limite à esquerda. Em outras palavras,

(i) Para $t \in [0, 1]$, $x(t^+) = \lim_{y \to t^+} x(y)$ existe e $x(t^+) = x(t)$.

(ii) Para $t \in [0, 1]$, $x(t^-) = \lim_{y \to t^-} x(y)$ existe.

Para $x \in D$ e $A \subset [0,1]$, faça

$$w_x(A) = \sup\{|x(s) - x(t)| : s, t \in A\}. \tag{2.1}$$

E vamos definir o módulo de continuidade de x como sendo

$$w_x(\delta) = \sup_{0 \le t \le 1-\delta} w_x[t, t+\delta]. \tag{2.2}$$

Uma função contínua no intervalo $[0,1]$ é uniformemente contínua. O próximo lema nos dará a idéia de continuidade uniforme para os elementos de D.

Lema 2.1.1. *Para cada $x \in D$ e cada ϵ positivo, existem pontos $t_0, t_1, \cdots, t_r$ tais que*

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1 \tag{2.3}$$

e

$$w_x[t_{i-1}, t_i) < \epsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{2.4}$$

Demonstração. Seja τ o supremo desses t em $[0,1]$ para que $[0,t)$ possa ser decomposto em infinitos subintervalos $[t_{i-1}, t_i)$ satisfazendo (2.4).

Como $x(0) = x(0^+)$, nós temos $\tau > 0$. Como $x(\tau^-)$ existe, $[0, \tau)$ pode ser decomposto. Agora $\tau < 1$ é impossível pois neste caso $x(\tau) = x(\tau^+)$. ■

Podemos retirar algumas considerações importantes deste lema. Primeiramente segue que no máximo uma quantidade enumerável de saltos $|x(t) - x(t^-)|$ excedem um positivo dado, em particular que x tem no máximo uma quantia enumerável de descontinuidades. Segue também que x é limitada:

$$\sup_t |x(t)| < \infty. \tag{2.5}$$

Finalmente, segue que x pode ser uniformemente aproximado por funções simples constantes sobre intervalos, visto que x é Borel-mensurável.

Vamos introduzir um módulo que represente em D o papel do módulo de continuidade em C (espaço das funções contínuas). Para $0 < \delta < 1$, faça

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{0<i\leq r} w_x[t_{i-1}, t_i), \tag{2.6}$$

onde o ínfimo se extende sobre todos os conjuntos finitos $\{t_i\}$ de pontos satisfazendo

$$
\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1, \\ t_i - t_{i-1} > \delta, \quad i = 1, 2, \cdots, r. \end{cases} \tag{2.7}
$$

O Lema 2.1.1 é equivalente a

$$
\lim_{\delta \to 0} w'_x(\delta) = 0. \tag{2.8}
$$

se este vale para todo $x \in D$.

Existem certas condições que são similares entre os módulos de continuidade para C e D. A definição de $w'_x(\delta)$ faz sentido mesmo que x não esteja em D. Para que x em $[0,1]$ esteja em C é necessário e suficiente que $\lim\limits_{\delta \to 0} w_x(\delta) = 0$. Analogamente, para que x esteja em D, é necessário e suficiente que satisfaça (2.8).

Como $[0,1)$ pode, para cada $\delta < \frac{1}{2}$, ser decomposto em subintervalos $[t_{i-1}, t_i)$ com $\delta < t_i - t_{i-1} \leq 2\delta$, nós temos

$$
w'_x(\delta) \leq w_x(2\delta), \quad \text{se} \quad \delta < \frac{1}{2}. \tag{2.9}
$$

Não pode haver uma desigualdade geral no sentido contrário, por causa de (2.8) e do fato que $w_x(\delta)$ não tende a 0 com δ se x tem descontinuidades.

Entretanto, suponha que $x \in C$. Dado ϵ, escolha pontos $\{t_i\}$ satisfazendo (2.7) e

$$\max_{0<i\leq r}[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \epsilon. \tag{2.10}$$

Se $|s-t| < \delta$, então s e t estão no mesmo subintervalo $[t_{i-1}, t_i)$ ou em subintervalos subsequentes. Assim, segue de (2.10) e da continuidade de x que $w_x(\delta) \leq 2w'_x(\delta) + 2\epsilon$. Como ϵ é arbitrário,

$$w_x(\delta) \leq 2w'_x(\delta), \quad \text{se} \quad x \in C. \tag{2.11}$$

Segue assim de (2.9) e (2.11) que os módulos $w_x(\delta)$ e $w'_x(\delta)$ cumprem o mesmo papel para funções contínuas x.

2.2 A topologia de Skorohod

Vamos começar tentando entender a idéia de distância entre duas funções no espaço D. No espaço C duas funções x e y estão próximas se o gráfico de $x(t)$ pode ser carregado sobre o gráfico de $y(t)$ por uma pequena perturbação das ordenadas mantendo fixas as abscissas. No caso do espaço D não podemos mensurar o tempo t de uma forma tão precisa, mas também podemos permitir uma pequena perturbação na escala do tempo, visto de um ponto de vista físico. A topologia seguinte, chamada de Skorohod, tem embutida esta idéia.

Seja Λ a classe das funções estritamente crescentes e contínuas de $[0,1]$ sobre $[0,1]$. Se $\lambda \in \Lambda$, então $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(1) = 1$.

Definição 2.2.1. *Defina $d(x,y)$ como o ínfimo dos ϵ positivos para o qual existe em Λ um λ tal que*

$$\sup_t |\lambda(t) - t| \leq \epsilon \tag{2.12}$$

e

$$\sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| \leq \epsilon. \tag{2.13}$$

Agora vamos mostrar que $d(x,y)$ é uma métrica.

Por (2.5), $d(x,y)$ é finito (tome $\lambda(t) \equiv t$).

Claramente, $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ implica que, para cada t, ou $x(t) = y(t)$ ou $x(t) = y(t-)$, o que implica $x = y$.

Se $\lambda \in \Lambda$, então λ^{-1} também está. Para mostrar que $d(x,y) = d(y,x)$, basta observar que

$$\sup_t |\lambda^{-1}(t) - t| = \sup_t |\lambda(t) - t|$$

e

$$\sup_t \left|x\left(\lambda^{-1}(t)\right) - y(t)\right| = \sup_t |x(t) - y(\lambda(t))|.$$

Falta mostrar apenas a desigualdade triangular. Se λ_1 e λ_2 estão em Λ então a composição $\lambda_2\lambda_1$ também está. A desigualdade triangular segue de

$$\sup_t |\lambda_2\lambda_1(t) - t| \leq \sup_t |\lambda_1(t) - t| + \sup_t |\lambda_2(t) - t|$$

e

$$\sup_t |x(t) - z(\lambda_2\lambda_1(t))| \leq \sup_t |x(t) - y(\lambda_1(t))| + \sup_t |y(t) - z(\lambda_2(t))|.$$

Logo, d é uma métrica.

Essa métrica define a topologia de Skorohod. Poderíamos definir a distância uniforme entre x e y como o ínfimo dos ϵ positivos para o qual $\sup_t |x(t) - y(t)| \leq \epsilon$. O λ definido em (2.12) e (2.13) representa a pequena deformação na escala do tempo mencionada anteriormente.

Sequências x_n de D convergem para um limite x na topologia de Skorohod se, e somente se, existirem funções λ_n em Λ tais que

$$\lim_n x_n(\lambda_n(t)) = x(t),$$

uniformemente em t e

$$\lim_n \lambda_n(t) = t,$$

uniformemente em t.

Se x_n converge uniformemente para uma função x, então converge na topologia de Skorohod (tome $\lambda_n t \equiv t$). O mesmo não se aplica ao sentido contrário. Para tal basta observar que há convergência para

$$x_n = I_{\left[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \to x = I_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}$$

na topologia de Skorohod, enquanto $x_n(t) \to x(t)$ falha nesse caso para $t = \frac{1}{2}$.

De

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |x_n(t) - x(\lambda_n^{-1}t)| + |x(\lambda_n^{-1}t) - x(t)|,$$

segue que a convergência na topologia de Skorohod implica convergência pontual nos pontos de continuidade de x. Se x for (uniformemente) contínua em todo $[0,1]$, então convergência na topologia de Skorohod implica convergência uniforme. Evidentemente, a topologia de Skorohod relativa a C coincide com a topologia uniforme nesse caso.

Podemos mostrar que o espaço D é separável, porém não completo sob esta métrica. Entretanto podemos definir uma segunda métrica d_0 o qual pode-se mostrar, ver Billingsley (1968 p. 114-115), que é equivalente à métrica d e que sobre esta métrica o espaço é completo.

Fizemos um estudo do espaço $D[0,1]$ nestas duas seções. O maior interesse em escrevê-las foi o de criar melhores condições para a compreensão da convergência em um outro espaço, o espaço $D[0,\infty)$. A idéia ficará mais clara nos capítulos posteriores. Entretanto, pode-se estender a teoria apresentada neste capítulo para o espaço $D[0,\infty)$. Para maiores detalhes sobre esta extensão, ver Stone (1963) e Lindvall (1973).

2.3 Convergência Fraca

Definição 2.3.1. *Sejam F e $\{F_n\}_{n\geq 1}$ funções de distribuição em $\mathbb{R}$. Dizemos que F_n converge fracamente (ou em distribuição) para F se $F_n(x)$ convergir para $F(x)$, $\forall\, x \in C(F)$.*

Aqui $C(F)$ representa o conjunto de todos os pontos de continuidade de F.

Usaremos a seguinte notação para indicar a convergência fraca de F_n para F:

$$F_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} F.$$

Apresentaremos uma outra notação em termos das probabilidades correspondentes na Definição 2.3.3.

Considere as funções de distribuição $\{F_n\}_{n\geq 1}$ e F abaixo:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{se} \quad x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

e

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Observe que $F_n(0)$ não converge para $F(0)$. 0 é o único ponto de descontinuidade de F e para todos os outros pontos, F_n converge para F. Logo, converge fracamente.

Se pensarmos em termo das probabilidades associadas às distribuições acima, temos que $P_n\left\{\left(-\infty, \frac{1}{n}\right)\right\}$ não converge para $P\{(-\infty, 0]\}$. Representemos por $F_r(A)$ a fronteira de um conjunto A dado. Então, em nosso caso, $F_r((-\infty, 0]) = \{0\}$ e $P\{0\} = 1 > 0$. Isto nos motiva algumas novas definições.

Definição 2.3.2. *Dado um espaço de probabilidade (Ω, Σ, P), dizemos que um conjunto $A \in \Sigma$ é P-contínuo se $P\{F_r(A)\} = 0$.*

Definição 2.3.3. *Dizemos que* $\{P_n\}_{n\geq 1}$ *converge fracamente para a probabilidade* P *se* $P_n\{A\}$ *convergir a* $P\{A\}$ *para todo* A *P-contínuo.*

Vamos utilizar a notação abaixo para convergência fraca:

$$P_n \overset{f}{\Longrightarrow} P.$$

Para os espaços métricos $(S, \mathbb{S})$, onde $\mathbb{S}$ representa os borelianos de S considere,

$C_B(S) = \{\phi; \;\; \phi : S \to \mathbb{R}$ tal que ϕ é contínua e limitada$\}$.

Definição 2.3.4. *Se* $\{P_n\}$ *e* P *são probabilidades em* $(S, \mathbb{S})$ *então* $P_n \overset{f}{\Longrightarrow} P$ *se*

$$\int_S \phi \; dP_n \longrightarrow \int_S \phi \; dP, \quad \forall \; \phi \in C_B(S).$$

Mostramos abaixo que as Definições 2.3.3 e 2.3.4 são equivalentes.

Proposição 2.3.1. *As Definições 2.3.3 e 2.3.4 são equivalentes.*

Demonstração. Comecemos mostrando que da Definição 2.3.3 segue a Definição 2.3.4.

(i) Suponha $P_n\{A\} \longrightarrow P\{A\}$, $\forall \; A$ P-contínuo, isto é, $P\{F_r(A)\} = 0$. Vamos mostrar que, para E fechado, temos

$$\limsup_n P_n\{E\} \leq P\{E\}. \tag{2.14}$$

Nós precisaremos da Equação (2.14) mais adiante.

Para $f \in C_B(S)$, onde supomos sem perda de generalidade que $0 < f < 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int f\ dP &\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} P\left\{\frac{i-1}{k} \leq f < \frac{i}{k}\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}\left[P\left\{f \geq \frac{i-1}{k}\right\} - P\left\{f \geq \frac{i}{k}\right\}\right] \\
&\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P\left\{f \geq \frac{i}{k}\right\}.
\end{aligned}$$

Similarmente obtemos

$$\int f\ dP_n \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P_n\left\{f \geq \frac{i}{k}\right\}.$$

Considerando os conjuntos fechados $E_{k,i} = \left\{f \geq \frac{i}{k}\right\}$ e tomando-se o $\limsup$, temos por (2.14),

$$\begin{aligned}
\limsup_n \int f\ dP_n &\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P\left\{f \geq \frac{i}{k}\right\} \\
&\leq \frac{1}{k} + \int f\ dP.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\limsup_n \int f \ dP_n \leq \int f \ dP.$$

Podemos aplicar o mesmo raciocínio para $-f$:

$$\begin{aligned} & \limsup_n \int -f \ dP_n \leq \int -f \ dP \\ \implies & -\liminf_n \int f \ dP_n \leq -\int f \ dP \\ \implies & \liminf_n \int f \ dP_n \geq \int f \ dP. \end{aligned}$$

Por fim, basta mostrar a Equação (2.14).

Para tal, vamos definir $E_k = \{x : \rho(x, E) \leq \epsilon_k\}$ com $\epsilon_k \downarrow 0$ tal que E_k seja P-contínuo.

Lembrando que $\rho(x, E) = \inf\{d(x, y), \forall \ y \in F_r(E)\}$ é a distância do ponto x ao conjunto E, relativa à métrica d.

Como $E_k \downarrow E$, temos que $P_n\{E\} \leq P_n\{E_k\}$. Deste modo,

$$\limsup_n P_n\{E\} \leq \lim_n P_n\{E_k\} = P\{E_k\},$$

onde a última desigualdade segue do fato que $P_n \overset{f}{\Longrightarrow} P$ e E_k é P-contínuo.

Da convergência $E_k \downarrow E$ segue que $P\{E_k\} \longrightarrow P\{E\}$ e, portanto,

$$\limsup_n P_n\{E\} \leq P\{E\}.$$

(ii) Pode-se encontrar a demonstração da contrapartida em Billingsley (1968).

$\blacksquare$

Segue abaixo uma sequência de condições equivalentes. Uma ou outra condição pode tornar a demonstração de determinado resultado mais fácil.

Teorema 2.3.1. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\lim_n \int \phi \, dP_n = \int \phi \, dP, \quad \forall \ \phi \in C_B(S).$

(ii) $\limsup P_n\{F\} \leq P\{F\}, \quad \forall \ F \subset S$ *onde* F *é fechado.*

(iii) $\liminf P_n\{O\} \geq P\{O\}, \quad \forall \ O \subset S$ *onde* O *é aberto.*

(iv) $\lim_n P_n\{A\} = P\{A\}, \quad \forall \ A$ *P-contínuo.*

A demonstração do Teorema 2.3.1 pode ser encontrada em Billingsley (1968).

Agora vamos definir e estudar a convergência em termos de elementos aleatórios, onde consideramos os espaços (Ω, Σ, P), $(S, \mathbb{S})$ e variáveis aleatórias $X, X_n : \Omega \longrightarrow S$, definimos abaixo:

Definição 2.3.5. *Dizemos que* $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$ *se* $P_{X_n} \stackrel{f}{\Longrightarrow} P_X$*, onde* $\forall A \in \mathbb{S}$*,* $P_X\{A\} = P\{X \in A\}$ *e* $P_{X_n}(A) = P\{X_n \in A\}$*.*

A notação $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$ também significa convergência em distribuição. Nesse caso, as funções de distribuição induzidas por suas respectivas v.a.'s.

Teorema 2.3.2. *As seguintes condições são equivalentes*

(i) $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X \left(P_{X_n} \stackrel{f}{\Longrightarrow} P_x\right)$

(ii) $E(\phi(X_n)) \longrightarrow E(\phi(X))$*, quando* $n \to \infty$*,* $\quad \forall\ \phi \in C_B(S)$*.*

(iii) Para F *fechado,* $F \subset \mathbb{S}$*,* $\limsup_n P\{X_n \in F\} \leq P\{X \in F\}$*.*

(iv) Para O *aberto,* $O \subset \mathbb{S}$*,* $\liminf_n P\{X_n \in O\} \geq P\{X \in O\}$*.*

(v) $\forall$ *A P-contínuo, isto é,* $P_X\{F_r(A)\} = 0$*, temos*

$\lim_n P\{X_n \in A\} = P\{X \in A\}$*.*

A demonstração do Teorema 2.3.2 pode ser encontrada em Billingsley (1968).

Mais um tipo de convergência muito útil é definido agora, a convergência em probabilidade. A notação $X_n \stackrel{p}{\to} X$ indicará a convergência em probabilidade.

Definição 2.3.6. *Dizemos que* $X_n \stackrel{p}{\to} X$ *(converge em probabilidade) em* $(S, \mathbb{S})$ *se, dado* $\epsilon > 0$*,* $P\{\rho(X_n, X) \geq \epsilon\} \longrightarrow 0$*, quando* $n \to \infty$*.*

Aqui, ρ é a métrica associada ao espaço $(S, \mathbb{S})$.

Proposição 2.3.2. *Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias.*

(i) Se $X_n \xrightarrow{p} X$, então $X_n \overset{d}{\Longrightarrow} X$.

(ii) Seja $a \in S$ uma constante. Então, $X_n \xrightarrow{p} a$ se, e somente se $X_n \overset{d}{\Longrightarrow} a$.

Demonstração. (i) Seja F fechado, $F \subset S$.

Dado $\epsilon > 0$, defina $F_\epsilon = \{x : \rho(x, F) \leq \epsilon\}$.

Nós temos que

$$\{X_n \in F\} \subset \{\rho(X_n, X) \leq \epsilon\} \cup \{X \in F_\epsilon\},$$

então

$$P\{X_n \in F\} \leq P\{\rho(X_n, X) \leq \epsilon\} + P\{X \in F_\epsilon\}.$$

Portanto,

$$\limsup_n P\{X_n \in F\} \leq P\{X \in F_\epsilon\}.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que

$$\limsup_n P\{X_n \in F\} \leq P\{X \in F\}.$$

A afirmação segue do Teorema 2.3.2(iii).

(ii) Dado $\epsilon > 0$, defina $\eta_\epsilon(a) = \{x : \rho(x, a) < \epsilon\}$.

Como $X_n \overset{d}{\Longrightarrow} a$, temos pelo Teorema 2.3.2(iv) que

$$\liminf_n P\{X_n \in \eta_\epsilon(a)\} \geq P\{a \in \eta_\epsilon(a)\} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_n P\{\rho(X_n, a) \leq \epsilon\} = 1.$$

$\blacksquare$

Proposição 2.3.3. *Se* $X_n \overset{d}{\Longrightarrow} X$ *e* $\rho(X_n, Y_n) \overset{p}{\to} 0$ *então* $Y_n \overset{d}{\Longrightarrow} X$.

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração da proposição 2.3.1(i). Basta observar que

$$\{Y_n \in F\} \subset \{\rho(X_n, X) \geq \epsilon\} \cup \{X_n \in F\}.$$

$\blacksquare$

Agora vamos apresentar dois dos teoremas mais importantes do capítulo. Faremos uma análise do comportamento de funções de elementos aleatórios no que se refere à convergência. O Teorema 2.3.4, conhecido como teorema da aplicação contínua, será fundamental no Capítulo 4.

Seja $h : S \to S'$, uma função mensurável entre os espaços métricos $(S, (S))$ e $(S', \mathbb{S}')$, e sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias onde $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$. O que aconteceria com a aplicação $h(X_n)$? O teorema da aplicação contínua nos diz que se o conjunto de descontinuidades da função h tem medida nula, então $h(X_n) \stackrel{d}{\Longrightarrow} h(X)$.

Teorema 2.3.3. *Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias e $h : S \to S'$ uma função contínua. Se $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$ então $h(X_n) \stackrel{d}{\Longrightarrow} h(X)$.*

Demonstração. Dado $\phi : S \to \mathbb{R}$, $\phi \in C_B(S)$, sabemos, pelo Teorema 2.3.2(ii), que

$$X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X \Leftrightarrow E(\phi(X_n)) \longrightarrow E(\phi(X)),$$

quando $n \to \infty$, $\forall\ \phi \in C_B(S)$.

Deste modo, queremos mostrar que, dado $\psi \in C_B(S')$,

$$E(\psi(h(X_n))) \longrightarrow E(\psi(h(X))),$$

quando $n \to \infty$.

De fato, isto vale pois $\psi \circ h \in C_B(S)$ e $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$.

■

Teorema 2.3.4. *Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias e $h : S \to S'$ uma função mensurável. Seja $D(h)$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de h e suponha $P\{X \in D(h)\} = 0$. Nessas condições, se $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$, então $h(X_n) \stackrel{d}{\Longrightarrow} h(X)$.*

Demonstração. Seja $F \subset S'$, F fechado.

$$\begin{aligned}
\limsup_n P\{h(X_n) \in F\} &= \limsup_n P\{X_n \in h^{-1}(F)\} \\
&\leq \limsup_n P\{X_n \in \overline{h^{-1}(F)}\} \\
&\leq P\{X \in \overline{h^{-1}(F)}\}. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos o fato de que $X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} X$ e o Teorema 2.3.2(iii).

Como $\overline{h^{-1}(F)} \subseteq D(h) \cup h^{-1}(F)$, temos que

$$\begin{aligned}
P\{X \in \overline{h^{-1}(F)}\} &\leq P\{X \in h^{-1}(F)\} + P\{X \in D(h)\} \\
&= P\{X \in h^{-1}(F)\} \\
&= P\{h(X)z \in F\}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos a hipótese $P\{X \in D(h)\} = 0$. Dessa forma, por (2.15) e (2.16), temos

$$\limsup_n P\{h(X_n) \in F\} \leq P\{h(X) \in F\},$$

e novamente pelo Teorema 2.3.2(iii), segue que $h(X_n) \overset{d}{\Longrightarrow} h(X)$.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Convergência Fraca de Processos de Risco

Um processo de risco ou de reserva $R = \{R(t) : t \geq 0\}$ é um processo estocástico dado por

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k. \tag{3.1}$$

onde $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ é um processo de contagem (podemos tomar o processo de Poisson como exemplo), $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ é uma seqüência de v.a.'s i.i.d. e representa o valor da indenização quando ocorre o k-ésimo sinistro num tempo aleatório τ_k, u representa o capital ou reserva inicial da seguradora e c representa a taxa de prêmio por unidade de tempo. Supomos que a v.a. Y_k é não-negativa, $u > 0$ e $c > 0$ tal que $ct > E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k\right)$ de modo que, em média, o ganho da seguradora é positivo.

No caso clássico, N é um processo de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$ e é independente do processo $\{Y_k\}$. Em um caso particular, se Y_k tem distribuição exponencial de parâmetro $\delta > \lambda$, o valor exato para a probabilidade de ruína é conhecido,

$$P\left\{\inf_{t\geq 0} R(t) < 0\right\} = \frac{\lambda}{\delta}\exp[-(\delta-\lambda)u].$$

Se Y_k's são i.i.d., com distribuição qualquer, e $E(Y_k) = \mu < \infty$, $0 < \sigma^2 = var(Y_k) < \infty$ então, pelo Teorema do Limite Central, segue que

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(Y_k-\mu) \overset{f}{\Longrightarrow} N(0,1). \tag{3.2}$$

E variantes do Teorema Funcional do Limite Central de Donsker nos permitem aproximar a soma parcial $\displaystyle\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, convenientemente normalizado, pelo movimento Browniano $B = \{B(t) : t \geq 0\}$. Uma boa referência para o processo de risco clássico é o livro de Asmussen (2000).

Dizemos que uma v.a. com distribuição F tem cauda pesada com índice caudal γ se

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{\gamma}, \quad \forall\ x > 0.$$

Pode-se mostrar, também, que uma v.a. com distribuição F tem cauda pesada se sua função geradora de momentos, $M_X(s)$, não é finita para qualquer s. Logo se X não possui segundo momento, esta possui cauda pesada. Na prática encontramos situações em que as indenizações não possuem segundo momento finito, $E(Y_k^2) = \infty$, ou seja a distribuição de Y_k possui cauda pesada. Neste caso, o estudo da probabilidade de ruína do processo de risco correspondente requer outras técnicas. Em Furrer, Michna e Weron (1997) esta análise é feita mediante aproximação de sequência de processos de risco $\{Q^{(n)}\}$ por processos de Lévy α-estáveis com $1 < \alpha < 2$, que será detalhada a seguir. A hipótese $\alpha > 1$ garante a média $E(Y_k) = \mu < \infty$.

Considere a sequência de processos de risco $\{Q^{(n)}\}$ dada por

$$Q^{(n)}(t) = u^{(n)} + c^{(n)}t - \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k^{(n)}, \quad t \geq 0. \tag{3.3}$$

Como as sequências $u^{(n)}$ e $c^{(n)}$ são determinísticas, na busca de um processo limite Q é natural a hipótese $u^{(n)} \to u > 0$ e $c^{(n)} \to c > 0$. Sendo $B(1) \stackrel{d}{=} N(0,1)$, a convergência (3.2) sugere que

$$\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mu) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Z_\alpha(1), \tag{3.4}$$

onde $Z_\alpha(1)$ tem distribuição estável com índice de estabilidade $1 < \alpha < 2$ e $\{\phi(n)\}$ são constantes normalizantes. No caso particular de $\alpha = 2$, temos

$\phi(n) = n^{1/2}\sigma$ e a noção de divisibilidade infinita, introduzida no Capítulo 1, juntamente com o Teorema de Donsker, indica que se $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$, então nossa sequência dada em (3.3) converge fracamente para

$$Q(t) = u + ct - B(t).$$

Dada a motivação acima, vamos supor $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$ onde, novamente, $\{Y_k\}$ é uma sequência de v.a.'s i.i.d. com média μ e assumimos a ocorrência de (3.4); a função ϕ será dada por $\phi(n) = n^{1/\alpha}L(n)$ onde L cresce lentamente para o infinito, ou seja, $L(n)n^{-\delta}$ converge a 0 para todo $\delta > 0$.

Se não explicitado anteriormente, assumimos pelo restante do trabalho que $1 < \alpha < 2$. Nessas condições, Y_k é uma v.a. que não possui segundo momento e tem distribuição com cauda pesada.

Agora estamos interessados em mostrar que a sequência de processos de risco dada em (3.3), nas condições dadas acima, converge fracamente para o processo de risco $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ dado por

$$Q(t) = u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) \tag{3.5}$$

onde, novamente, u e c são constantes positivas e $\{Z_\alpha(t) : t \geq 0\}$ é um processo de Lévy α-estável; a constante positiva λ será explicitada no Teorema

3.0.5.

Diferentemente do caso clássico, não supomos $N^{(n)}$ um processo de Poisson em (3.3), veremos adiante que este pode ser um processo de renovação arbitrário:

$$N(t) = \max\left\{ n : \sum_{k=1}^{n} T_k \leq t \right\},$$

onde assumimos que os tempos entre chegadas $(T_k : k \in \mathbb{N})$ são variáveis aleatórias i.i.d. e positivas. Para maiores detalhes sobre processos de renovação ver Ross (1996).

Vamos mostrar a convergência fraca de $\{Q^{(n)}\}$ para o processo Q no Teorema 3.0.5. Para tal, necessitaremos da proposição abaixo onde mostra-se que a função composição é contínua, ver Whitt (1980).

Proposição 3.0.4. *Seja* $(Z_n : n \in \mathbb{N})$*,* Z *um processo em* D *e suponha que* $Z_n \stackrel{f}{\Longrightarrow} Z$*. Seja* $(N_n : n \in \mathbb{N})$ *uma sequência de processos com trajetórias não decrescentes saindo de* 0 *tal que* $N_n \stackrel{f}{\Longrightarrow} \lambda I$*, onde* $\lambda > 0$ *e* I *denota a função identidade em* $[0, \infty)$*. Assumimos que para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* Z_n *e* N_n *estão definidos no mesmo espaço de probabilidade. Então,*

$$Z_n(N_n) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Z(\lambda I), \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Teorema 3.0.5. *Seja a sequência* $(Y_k : k \in \mathbb{N})$ *como acima e considere* $(N^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ *uma sequência de processos pontuais tais que*

$$\frac{N^{(n)} - \lambda nt}{\phi(n)} \xrightarrow{p} 0, \quad n \to \infty, \tag{3.7}$$

na topologia de Skorohod para alguma constante positiva λ*. Assuma também que, para* $E[Y_k] = \mu$*, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left(c^{(n)} - \lambda n \frac{\mu}{\phi(n)} \right) = c, \quad \lim_{n\to\infty} u^{(n)} = u.$$

Então

$$u^{(n)} + c^{(n)}t - \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k \overset{f}{\Longrightarrow} u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t), \quad n \to \infty, \tag{3.8}$$

na topologia de Skorohod.

Demonstração. Sabemos que $Q^{(n)}(t)$ tem a seguinte forma:

$$Q^{(n)}(t) = u^{(n)} + c^{(n)}t - \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k.$$

Agora, somando e subtraindo o termo $\frac{\mu}{\phi(n)} \big(N^{(n)}(t) + \lambda nt\big)$, obtemos a seguinte expressão:

$$Q^{(n)}(t) = u^{(n)} + t\left(c^{(n)} - \lambda n \frac{\mu}{\phi(n)}\right) - \mu\left(\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\phi(n)}\right) - \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} (Y_k - \mu).$$

Da hipótese (3.7) obtemos

$$\mu\left(\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\phi(n)}\right) \xrightarrow{p} 0, \quad n \to \infty$$

na topologia de Skorohod.

Segue assim, da hipótese (3.4) e utilizando os mesmos argumentos do Teorema de Donsker, que

$$\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{[nt]} (Y_k - \mu) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Z_\alpha(t), \quad n \to \infty \tag{3.9}$$

na topologia de Skorohod (ver Skorohod, 1957).

Nós temos, por (3.9), que

$$Z(n;t) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{[nt]} (Y_k - \mu) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Z_\alpha(t), \quad n \to \infty.$$

E pela hipótese (3.7)

$$N(n;t) = N^{(n)}(t) \stackrel{f}{\Longrightarrow} \lambda n t = \lambda I, \quad \lambda > 0.$$

Sendo assim, temos, pela Proposição 3.0.4, que

$$Z(N(n;t)) \overset{f}{\Longrightarrow} Z_\alpha(\lambda t) = \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t).$$

Ou seja,

$$\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} (Y_k - \mu) \overset{f}{\Longrightarrow} \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t), \quad n \to \infty$$

na topologia de Skorohod.

Como a expressão

$$u^{(n)} + t\left(c^{(n)} - \lambda n \frac{\mu}{\phi(n)}\right) - \mu\left(\frac{N^{(n)}(t) - \lambda n t}{\phi(n)}\right)$$

converge fracamente para $u+ct$ na topologia de Skorohod, segue a demonstração.$\blacksquare$

Como vimos anteriormente, no Teorema 3.0.5 não necessitamos que $N^{(n)}$ seja um processo de Poisson. De fato, pode ser um processo de renovação arbitrário. Para melhor entendimento do trabalho, vamos definir $N^{(n)}(t) = N(n;t) = N(nt)$ e mostrar na proposição abaixo que, sob determinadas condições, $N^{(n)}(t)$ se aproxima de uma função linear na topologia de Skorohod.

Proposição 3.0.5. *Seja* $(N(t) : t \geq 0)$ *um processo de renovação com tempo entre chegadas* $(T_k : k \in \mathbb{N})$ *e assuma que existe uma constante positiva* λ *e uma função* L *variando lentamente tal que*

(3.10) $$\frac{1}{\phi(n)}\sum_{k=1}^{[nt]}\left(T_k - \frac{1}{\lambda}\right) \stackrel{f}{\Longrightarrow} B(t), \quad n \to \infty,$$

na topologia de Skorohod, onde $\phi(n) = \sqrt{n}L(n)$*. Então, para* $1 < \alpha < 2$*, nós temos*

(3.11) $$\frac{N(n;t) - \lambda nt}{n^{1/\alpha}} \stackrel{p}{\to} 0, \quad n \to \infty,$$

na topologia de Skorohod.

Demonstração. É suficiente mostrar que

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t}\frac{|N(n;s) - \lambda ns|}{n^{1/\alpha}} > \epsilon\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Se

$$\sup_{0\le s\le t}\frac{|N(n;s) - \lambda ns|}{n^{1/\alpha}} > \epsilon$$

então existe $s \in [0,t]$ com $N(n;s) - \lambda ns > \epsilon n^{1/\alpha}$ ou $N(n;s) - \lambda ns < -\epsilon n^{1/\alpha}$. No primeiro caso, temos

$$\sum_{k=1}^{[\lambda ns+\epsilon n^{1/\alpha}]} T_k < ns.$$

De fato, $N(n;s) - \lambda ns > \epsilon n^{1/\alpha}$ implica,

$$\sum_{k=1}^{N(n;s)} T_k > \sum_{k=1}^{[\lambda ns+\epsilon n^{1/\alpha}]} T_k.$$

Mas, como definimos

$$N(n;s) = \max\left\{n : \sum_{k=1}^{n} T_k \leq ns\right\},$$

então

$$ns \geq \sum_{k=1}^{N(n;s)} T_k > \sum_{k=1}^{[\lambda ns+\epsilon n^{1/\alpha}]} T_k.$$

Agora, defina u tal que $nu = \lambda ns + \epsilon n^{1/\alpha}$,

$$\begin{aligned} nu = \lambda ns + \epsilon n^{1/\alpha} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{nu}{\lambda} = ns + \frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda} \\ &\Longrightarrow \quad ns = \frac{nu}{\lambda} - \frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[\lambda ns+\epsilon n^{1/\alpha}]} T_k = \sum_{k=1}^{[nu]} T_k < ns = \frac{nu}{\lambda} - \frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda} \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{[nu]} T_k - \frac{nu}{\lambda} < -\frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda} \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{[nu]} \left(T_k - \frac{1}{\lambda}\right) < -\frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{0\le u\le \lambda t+\epsilon n^{1/\alpha-1}} \frac{1}{n^{1/\alpha}}\left|\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k-\frac{1}{\lambda}\right)\right| > \frac{\epsilon}{\lambda}.$$

Observe que, para $1<\alpha<2$, o supremo acima é tomado num intervalo limitado. De fato,

$$1<\alpha<2 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}-1<0 \Longrightarrow n^{1/\alpha-1}\to 0, \quad n\to\infty.$$

Observe também que $\phi(n)=L(n)n^{-\delta}$, $\delta>0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k-\frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{\phi(n)}{n^{1/\alpha}}\frac{1}{\phi(n)}\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k-\frac{1}{\lambda}\right)\\ &= L(n)n^{-\delta}\frac{1}{\phi(n)}\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k-\frac{1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Como $\alpha<2$ e $L(n)n^{-\delta}$ converge a 0 para todo $\delta>0$, juntamente com a hipótese (3.10) temos

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{[nu]}\left(T_k-\frac{1}{\lambda}\right)\xrightarrow{p} 0, \quad n\to\infty, \tag{3.12}$$

na topologia de Skorohod. Se $N(n;s)-\lambda ns<-\epsilon n^{1/\alpha}$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{[\lambda ns-\epsilon n^{1/\alpha}]} T_k > ns.$$

Para $nu=\lambda ns-\epsilon n^{1/\alpha}$, temos

$$\sum_{k=1}^{[nu]} \left(T_k - \frac{1}{\lambda} \right) > \frac{\epsilon n^{1/\alpha}}{\lambda}.$$

Portanto,

$$\sup_{0 \leq u \leq \lambda t - \epsilon n^{1/\alpha - 1}} \frac{1}{n^{1/\alpha}} \left| \sum_{k=1}^{[nu]} \left(T_k - \frac{1}{\lambda} \right) \right| > \frac{\epsilon}{\lambda}.$$

Finalmente, da relação (3.12) segue que

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|N(n; s) - \lambda n s|}{n^{1/\alpha}} > \epsilon \right\} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

e a demonstração está completa. ■

Capítulo 4

Probabilidade da Ruína

Depois de estudar a convergência de processos de riscos no Capítulo 3, vamos estudar a probabilidade de ruína associada a esse processo. Para obter essa probabilidade, dado um processo de risco $R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, definimos o tempo de ruína associado ao processo $R(t)$ por

$$T(R) = \inf\{t : t > 0, R(t) < 0\}, \tag{4.1}$$

se $\{t : t > 0, R(t) < 0\} \neq \emptyset$ e $T(R) = \infty$ caso contrário. Definimos também a probabilidade de ruína associada ao processo $R(t)$ por

$$P\{T(R) < \infty\}.$$

No caso clássico, $N(.)$ processo de Poisson e $E(e^{tY_k}) < \infty$ para algum $t > 0$, temos a desigualdade de Lundberg

$$P\{T(R) < \infty\} \leq e^{-\gamma u}, \tag{4.2}$$

onde $\gamma > 0$ é o coeficiente de ajuste. E no caso das indenizações Y_k's serem exponencialmente distribuídas, temos expressões exatas para a probabilidade de ruína a tempo finito, $P\{T(R) \leq t\}$, onde, para a exponencial padrão e para o processo de Poisson com taxa $\lambda < 1$, temos

$$P\{T(R) \leq t\} = \lambda e^{-(1-\lambda)u} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f_1(\theta)f_2(\theta)}{f_3(\theta)} d\theta, \tag{4.3}$$

onde

$$f_1(\theta) = \lambda \exp[2\sqrt{\lambda}t\cos\theta - (1+\lambda)t + u(\sqrt{t}\cos\theta - 1)],$$

$$f_2(\theta) = \cos(u\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta) - \cos(u\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\theta),$$

$$f_3(\theta) = 1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda}\cos\theta.$$

(ver, Asmussen (2000) p. 71 e p. 101).

Neste trabalho, estudamos processos de risco onde as indenizações Y_k possuem distribuições de cauda pesada e, portanto, não dispomos de (4.2) ou (4.3) para avaliar a probabilidade da ruína. Porém, vimos no Teorema 3.0.5 que, sob certas condições de regularidade, podemos aproximar processos de risco

$$Q^{(n)}(t) = u^{(n)} + c^{(n)}t - \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k^{(n)}$$

por movimentos de Lévy α-estáveis,

$$Q(t) = u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t).$$

A idéia é utilizar essa aproximação para analisar o tempo de ruína $T(Q^{(n)})$ por meio de $T(Q)$. Usamos como referência básica deste capítulo o trabalho de Furrer et al (1997).

Na Seção 4.1.1, mostramos que podemos aproximar os tempos de ruína associados à sequência de processos de risco $\{Q^{(n)}\}$ pelo tempo de ruína do movimento de Lévy α-estável limite. O Teorema 4.1.1 mostrará que temos a convergência fraca

$$T(Q^{(n)}) \Rightarrow T(Q)$$

e também a aproximação para a probabilidade a tempo finito

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \le t\} = P\{T(Q) \le t\}.$$

Na Seção 4.2, vamos estabelecer algumas cotas superiores para o tempo de ruína $T(Q)$ do processo limite em tempo finito.

4.1 Aproximação dos Tempos de Ruína

Nesta seção, estudamos a aproximação de $T(Q^{(n)})$ por $T(Q)$

$$T(Q) = \inf\{t : t > 0, Q(t) < 0\},$$

onde o processo $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$, como definido em (3.5), tem a forma

$$Q(t) = u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t), \quad u > 0,\ c > 0,\ \lambda > 0$$

e $Z_\alpha = \{Z_\alpha(t) : t \geq 0\}$ é um movimento de Lévy α-estável com $1 < \alpha < 2$.

As convergências

$$T(Q^{(n)}) \Rightarrow T(Q),$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} Q^{(n)}(s) < 0\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} Q(s) < 0\right\}$$

serão estabelecidas no Teorema 4.1.1. Porém, necessitaremos dos Lemas 4.1.1 e 4.1.2 relacionados abaixo para a demonstração do mesmo.

Lema 4.1.1. *Seja $Z_\alpha(t)$ um movimento de Lévy α-estável com índice $1 < \alpha < 2$. Então, podemos representá-lo na forma*

$$Z_\alpha(t) = C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\gamma_i \Gamma_i^{-1/\alpha} I_{(\tau_i \leq t)} - \beta t b_i^{(\alpha)} \right), \tag{4.4}$$

onde $0 \leq t \leq 1$.

Aqui $(\gamma_i : i \in \mathbb{N})$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. satisfazendo

$$P\{\gamma_i = 1\} = 1 - P\{\gamma_i = -1\} = \frac{1}{2}(1+\beta).$$

$(\Gamma_i : i \in \mathbb{N})$ é uma sequência de tempos de chegada de um processo de Poisson com taxa de chegada unitária e $(\tau_i : i \in \mathbb{N})$ é uma sequência de v.a.'s i.i.d. com distribuição uniforme em $[0,1]$. Estas três sequências são independentes. C_α e $b_i^{(\alpha)}$ são constantes onde

$$C_\alpha = \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}$$

e

$$b_i^{(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(i^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (i-1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right).$$

Os tempos dos saltos (τ_i) são distribuídos uniformemente sobre $[0,1]$, a direção do salto é governada por (γ_i) e o tamanho dos saltos, visto em ordem decrescente, está distribuído como a $-1/\alpha$ potência do tempo de chegada de um processo de Poisson com intensidade unitária.

Em particular, $\Gamma_1^{-1/\alpha}$ é o tamanho do salto mais alto, $\Gamma_2^{-1/\alpha}$ o tamanho do segundo salto mais alto, e assim por diante.

Para detalhes da demonstração do Lema 4.1.1, ver Samorodnitsky e Taqqu (1994), p. 151.

Para o processo Q dado em (3.5), seja $\{\tau_n\}$ a sequência dos tempos de parada que representa os tempos de salto do processo, isto é, as descontinuidades de Q. Assim, o n-ésimo ponto de descontinuidade ocorre no tempo aleatório τ_n e

$$\Delta Q(\tau_n) = Q(\tau_n) - Q(\tau_n^-) \neq 0. \tag{4.5}$$

Lema 4.1.2. *Seja $Q = (Q(t) : t \geq 0)$ o processo dado em (3.5) e seja $\{\tau_n\}$ a sequência de todos os saltos de Q. Então,*

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q(\tau_n^-) = 0)\right\} = 0. \tag{4.6}$$

Demonstração. De fato, basta mostrar que $P\{Q(\tau_k^-) = 0\} = 0$. Por (4.5) temos

$$P\{Q(\tau_k^-)=0\}=P\{\Delta Q(\tau_k)=Q(\tau_k)\}$$

e por (4.4),

$$\Delta Q(\tau_k)=c(\tau_k-\tau_k^-)-\lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\Gamma_i^{1/\alpha}\left[I_{(\tau_i\leq\tau_k)}-I_{(\tau_i\leq\tau_k^-)}\right]+\lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\beta(\tau_k-\tau_k^-)b_i^{(\alpha)}.$$

Como os tempos τ_i's tem distribuição uniforme e $P\left\{I_{(\tau_k\leq\tau_k^-)}=0\right\}=1$, temos que

$$\Delta Q(\tau_k)=\lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\gamma_k\Gamma_k^{1/\alpha}\qquad\text{q.c.}$$

e

$$Q(\tau_k)-\Delta Q(\tau_k)=u+c\tau_k+\lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\beta\tau_k b_k^{(\alpha)}-\lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{\infty}\left[\gamma_i\Gamma_i^{1/\alpha}I_{(\tau_i\leq\tau_k)}-\beta\tau_k b_i^{(\alpha)}\right]\qquad\text{q.c.}$$

Como os tempos τ_i's são independentes, condicionando para $\tau_k=t$, temos

$$\begin{aligned}&P\{Q(\tau_k)-\Delta Q(\tau_k)=0|\tau_k=t\}\\=\;&P\left\{u+ct+\lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\beta t b_k^{(\alpha)}-\lambda^{1/\alpha}C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{\infty}\left[\gamma_i\Gamma_i^{1/\alpha}I_{(\tau_i\leq t)}-\beta t b_i^{(\alpha)}\right]=0\right\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, por (4.4), se $\tau_k>t$,

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) \\
&= u + ct - \lambda^{1/\alpha} C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \Gamma_i^{1/\alpha} I_{(\tau_i \le t)} + \lambda^{1/\alpha} C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \beta t b_i^{(\alpha)} \\
&= u + ct - \lambda^{1/\alpha} C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{1/\alpha} I_{(\tau_i \le t)} + \lambda^{1/\alpha} C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \beta t b_i^{(\alpha)},
\end{aligned}
$$

pois $P\left\{ \sum_{i>k} I_{(\tau_i \le t)} = 0 \right\} = 1$.

Assim,

$$P\{Q(\tau_k) - \Delta Q(\tau_k) = 0 |\ \tau_k = t\} = P\{u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) = 0 |\ \tau_k > t\}.$$

Como $Z_\alpha(t)$ é uma v.a. contínua, $u > 0$ e $c > 0$, temos

$$P\{Q(\tau_k) - \Delta Q(\tau_k) = 0 |\ \tau_k = t\} = 0.$$

Integrando sobre t, segue que

$$P\{Q(\tau_k^-) = 0\} = P\{Q(\tau_k) - \Delta Q(\tau_k) = 0\} = 0.$$

$\blacksquare$

Teorema 4.1.1. *Seja T o tempo de ruína definido em (4.1). Se $Q^{(n)} \Rightarrow Q$ onde Q é dado em (3.5), então*

(4.7) $$T(Q^{(n)}) \Rightarrow T(Q).$$

Mais ainda,

(4.8) $$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}$$

e

(4.9) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} Q^{(n)}(s) < 0\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} Q(s) < 0\right\}.$$

Demonstração. A prova do teorema acima é complexa e pode ser encontrada em Furrer et al (1997, Teorema 2). Vamos citar os elementos matemáticos necessários e esquematizar sua demonstração abaixo. A grande dificuldade é mostrar que o funcional T definido em (4.4) é contínuo quase certamente. Segue-se, assim, pelo Teorema 2.3.4, que $T(Q^{(n)}) \Rightarrow T(Q)$, visto que $Q^{(n)} \Rightarrow Q$ pelo Teorema 3.0.5. Desta convergência fraca, temos (4.8) e (4.9) , pois (4.1) nos diz que

$$\{T(Q) > t\} = \{Q(s) \geq 0, s \leq t\}$$

e

$$\{T(Q) \leq t\} = \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} Q(s) < 0 \right\}.$$

Para a prova da continuidade quase certa de T, é necessário mostrar que, se x_n e x são elementos do espaço $D[0, \infty)$ e $x_n \to x$ na topologia de Skorohod, então $T(x_n) \to T(x)$. Suponha por absurdo que $T(x_n)$ não converge para $T(x)$. Então existe uma subsequência $x_{n'}$ tal que $T(x_{n'}) \to t_0 \neq T(x)$. Primeiramente, suponha $T(x) < t_0$ e $T(x) < \infty$. Como $T(x) = \inf\{t : t > 0, x(t) < 0\}$ é contínua pela direita, temos que, para $\delta > 0$ pequeno, $x(T(x) + \delta) < 0$. Como o número de descontinuidades de x é enumerável, podemos escolher δ suficientemente pequeno de modo que $T(x) + \delta < t_0$ e $x(T(x) + \delta) = x((T(x) + \delta)^{-})$. Pela continuidade de x em $T(x) + \delta$, temos que $x_{n'}(T(x) + \delta) \to x(T(x) + \delta)$. Assim, para n' suficientemente, grande temos $x_{n'}(T(x) + \delta) < 0$. Por outro lado, como $T(x_{n'}) \to t_0 > T(x) + \delta$, para n' suficientemente grande, temos $T(x_{n'}) > T(x) + \delta$. Como $T(x_{n'}) = \inf\{t : t > 0, x_{n'}(t) < 0\}$, não podemos ter $x_{n'}(T(x) + \delta) < 0$.

Suponha agora $t_0 < T(x)$. Também permitimos $T(x) = \infty$. Então, $x_n(T(x_{n'})) \leq 0$ e $x_n(T(x_{n'}))$ tende para $x(t_0)$ ou $x(t_0^{-})$, pela continuidade à direita de x_n. Logo, $x(t_0) \leq 0$ ou $x(t_0^{-}) \leq 0$. No caso de $x(t_0) \leq 0$, usamos a Propriedade Forte de Markov e o fato de que $Z_\alpha(t) - ct$ cruza o 0 infinitas vezes em toda vizinhança à direita de $t = 0$. Isto segue da Lei do Logaritmo

Iterado para processos estáveis (ver Fristedt, 1974, p. 361; Mijnheer, 1975, p.45). Para o caso $x(t_0^-) \leq 0$, usando o Lema 4.1.2, nós temos $x(t_0^-) < 0$ para quase todas as trajetórias. Então, nós podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que $x(t_0 - \delta) < 0$, o que é uma contradição. ■

4.2 Ruína em Tempo Finito

Vimos na seção anterior que podemos aproximar o tempo de ruína da sequência de processos de risco $Q^{(n)}$ pelo tempo do processo limite Q.

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

Nesta seção, vamos estabelecer cotas superiores para $P\{T(Q) \leq t\}$, ou seja, limitantes para a probabilidade da ruína a tempo finito. Primeiramente, para uma melhor compreensão do trabalho, estabelecemos essas cotas para movimentos de Lévy α-estáveis simétricos nos Teoremas 4.2.2 e 4.2.3. Em seguida, generalizamos para movimentos de Lévy α-estáveis arbitrários nos Teoremas 4.2.4 e 4.2.5.

Nossa primeira aproximação para $P\{T(Q) \leq t\}$ será dada na Proposição 4.2.1. Entretanto, necessitaremos do lema abaixo que trata do comportamento de caudas de distribuições estáveis, ver (Samorodnitsky and Taqqu, 1994, p. 16).

Lema 4.2.1. *Seja* $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *com* $1 < \alpha < 2$. *Então*

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X > \lambda\} = C_\alpha \dfrac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha, \\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X < -\lambda\} = C_\alpha \dfrac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha. \end{cases}$$

A constante C_α mencionada acima e na proposição abaixo é a mesma do Lema 4.1.1.

A proposição abaixo é importante para uma melhor compreensão do estudo feito neste trabalho e serve como experiência para os resultados posteriores. Para duas funções f e g, vamos usar a notação $f \sim g$ para indicar que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

Proposição 4.2.1. *Seja* Z_α *um movimento* α*-estável de Lévy com parâmetro de assimetria* $-1 < \beta < 1$. *Então,*

$$P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\} \sim C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \lambda t (u + ct)^{-\alpha}, \quad u \to \infty. \tag{4.10}$$

Demonstração. Como $Z_\alpha(t)$ tem distribuição α-estável e toda distribuição α-estável tem cauda variando regularmente à direita, para $-1 < \beta < 1$, concluímos que (ver Willekens, 1987)

$$P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\} \sim P\{ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) < -u\}, \quad u \to \infty.$$

Agora,

$$\begin{aligned} P\{ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) < -u\} &= P\{-\lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) < -u - ct\} \\ &= P\{\lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) > u + ct\} \\ &= P\{Z_\alpha(\lambda t) > u + ct\}. \end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos a auto-similaridade de $Z_\alpha(t)$.

Pelo Lema 4.2.1, temos

$$(u + ct)^\alpha P\{Z_\alpha(\lambda t) > u + ct\} \longrightarrow C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \lambda t, \quad \text{quando} \;\; u \to \infty,$$

ou

$$P\{Z_\alpha(\lambda t) > u + ct\} \longrightarrow C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \lambda t (u + ct)^{-\alpha}, \quad \text{quando} \;\; u \to \infty.$$

Segue, assim, o teorema. ■

Vamos encontrar a primeira cota superior para o caso simétrico. Antes, precisaremos do Teorema de Bochner. Este nos diz que um movimento de Lévy α-estável simétrico pode ser obtido de um movimento browniano por uma mudança de tempo aleatório, ver Janick e Weron (1994, p. 33).

Teorema 4.2.1 (Bochner). *Seja* $X(t) \stackrel{d}{=} S_{\alpha/2}\left(t^{2/\alpha}, 1, 0\right)$ *e* B *o movimento Browniano padrão. Suponha ambos independentes e no mesmo espaço de probabilidade. Então,*

$$B(X(t)) \stackrel{d}{=} Z_\alpha(t) \tag{4.11}$$

e $B(X(t))$ *é um movimento de Lévy* α*-estável simétrico.*

Para provar o Teorema 4.2.2, também precisaremos do lema abaixo, chamado princípio de reflexão. Definimos o processo $S = (S(t) : t \geq 0)$ por $S(t) = \sup\limits_{0 \leq s \leq t} B(s)$, e o chamamos processo máximo de B. S é um processo adaptado com trajetórias não decrescentes. Isto decorre da continuidade de B.

Agora podemos enunciar o lema, ver Karatzas e Shreve (1988, p.95).

Lema 4.2.2. *Seja* $B = (B(t) : t \geq 0)$ *o movimento Browniano padrão* $(B(0) = 0 \ \ q.c.)$ *e* S *seu processo máximo. Para* $y \geq 0$, $z > 0$,

$$P(B(t) < z - y, S(t) \geq z) = P(B(t) > y + z). \tag{4.12}$$

O Lema 4.2.2 e a Equação (4.11) nos permitem estabelecer o seguinte princípio para movimentos α-estáveis de Lévy simétricos.

Teorema 4.2.2. *Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy simétrico, $y \geq 0$ e $z > 0$. Então,*

$$P\left\{Z_\alpha(t) < z - y,\ \sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} \leq P\{Z_\alpha(t) > y + z\}. \tag{4.13}$$

Demonstração. Considere

$$\begin{aligned}
P_t(z,y) &= P\left\{Z_\alpha(t) < z - y,\ \sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} \\
&= P\left\{B(X(t)) < z - y,\ \sup_{0\leq s\leq t} B(X(s)) \geq z\right\} \\
&= \int_{D\times C} I_{\left\{b(x(t))<z-y,\ \sup_{0\leq s\leq t} b(x(s))\geq z\right\}} dM(x)dW(b) \\
&= \int_D dM(x) \int_C I_{\left\{b(x(t))<z-y,\ \sup_{0\leq s\leq t} b(x(s))\geq z\right\}} dW(b).
\end{aligned}$$

A última igualdade decorre da independência dos processos X e B. Aqui, W denota a medida de Wiener no espaço $C = C[0,\infty)$ das funções contínuas e M é a medida no espaço D induzida pelo processo X. Então,

$$\begin{aligned}
P_t(z,y) &= \int_D P\left\{B(x(t)) < z - y,\ \sup_{0\leq s\leq t} B(x(s)) \geq z\right\} dM(x) \\
&\leq \int_D P\left\{B(x(t)) < z - y,\ \sup_{0\leq s\leq x(t)} B(s) \geq z\right\} dM(x).
\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 4.2.2 obtemos

$$
\begin{aligned}
P_t(z,y) &\leq \int_D P\{B(x(t)) > y+z\} dM(x) \\
&= \int_{D\times C} I_{\{b(x(t))>y+z\}} dM(x) dW(b) \\
&= P\{B(X(t)) > y+z\},
\end{aligned}
$$

o que finda a demonstração. ∎

O corolário 4.2.1 torna a leitura um pouco mais fácil com relação ao limitante para $P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\}$.

Corolário 4.2.1. *Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy simétrico e z um número positivo. Então,*

$$
P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} \leq 2P\{Z_\alpha(t) > z\}. \tag{4.14}
$$

Demonstração. Tomando $y = 0$ em (4.13), temos

$$
\begin{aligned}
& P\left\{Z_\alpha(t) < z, \sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} \leq P\{Z_\alpha(t) > z\} \\
\Longrightarrow\ & P\{Z_\alpha(t) < z\} + P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} - P\left\{(Z_\alpha(t) < z) \cup \left(\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right)\right\} \leq P\{Z_\alpha(t) > z\} \\
\Longrightarrow\ & P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} \leq 2P\{Z_\alpha(t) > z\} - 1 + P\left\{(Z_\alpha(t) < z) \cup \left(\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right)\right\} \\
\Longrightarrow\ & P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} \leq 2P\{Z_\alpha(t) > z\}
\end{aligned}
$$

∎

Agora vamos nos concentrar em obter limitantes para a probabilidade de ruína $P\{T(Q) \leq t\}$ no caso em que Z_α é um movimento de Lévy α-estável simétrico. Vamos introduzir uma nova notação. Para $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(1, \beta, 0)$ vamos denotar por $G(x; \alpha, \beta)$ sua função de distribuição e representaremos $\overline{G} = 1 - G$.

Teorema 4.2.3. *Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy simétrico. Para números positivos u, c e λ, temos*

$$P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\} \leq 2P\{Z_\alpha(t) > u\lambda^{-1/\alpha}\} = 2\overline{G}(u/(\lambda t)^{1/\alpha}; \alpha, 0).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
& P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) > t\} \\
= \; & P\left\{\inf_{0 \leq s \leq t} (u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \geq 0\right\} \\
= \; & P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} (-u - cs + \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq 0\right\} \\
= \; & 1 - P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} (-u - cs + \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) > 0\right\} \\
\geq \; & 1 - P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} Z_\alpha(s) \geq u\lambda^{-1/\alpha}\right\} \\
\geq \; & 1 - 2P\left\{Z_\alpha(s) > u\lambda^{-1/\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos o Corolário 4.2.1, e para justificar a penúltima desigualdade, devemos observar que

$$\left\{\sup_{0\leq s\leq t}(-u-cs+\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s))>0\right\}\subset\left\{\sup_{0\leq s\leq t}Z_\alpha(s)\leq u\lambda^{-1/\alpha}\right\}.$$

De fato isto ocorre, pois

$$\begin{aligned}
& \left\{\sup_{0\leq s\leq t}(-u-cs+\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s))>0\right\} \\
\equiv\ & \left\{-u+\sup_{0\leq s\leq t}(-cs+\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s))>0\right\} \\
\equiv\ & \left\{\sup_{0\leq s\leq t}(-cs+\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s))>u\right\} \\
\subset\ & \left\{\sup_{0\leq s\leq t}(\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s))\geq u\right\} \\
\equiv\ & \left\{\sup_{0\leq s\leq t}Z_\alpha(s)\geq u\lambda^{-1/\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

Segue assim a demonstração. ■

Adiante vamos estabelecer as cotas superiores para o caso não simétrico. Para este fim, faremos uso do lema abaixo que está demonstrado em Furrer et al (1997).

Lema 4.2.3. *Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy com $\alpha\neq 1$ e parâmetro de desvio $|\beta|\leq 1$. Então, para $z>0$, temos*

(i) $P\{Z_\alpha(t)>0\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi\alpha}\arctan\left(\beta\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)=:\rho,$

(ii) $P\left\{\sup\limits_{0\leq s\leq t}Z_\alpha(s)\geq z\right\}\leq\left(\dfrac{1}{\rho}\right)P\{Z_\alpha(t)>z\}.$

Demonstração. (i) Como Z_α é auto-similar, temos $Z_\alpha(t) \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha} Z_\alpha(1)$ e portanto, $P\{Z_\alpha(t) > 0\} = P\{Z_\alpha(1) > 0\} = \rho$ independente de t. De Zolatarev (1986, p.79), nós temos

$$G(0; \alpha, \beta) = \frac{1}{2}\left(1 - \overline{\beta}\frac{K(\alpha)}{\alpha}\right),$$

onde $\overline{\beta}$ é tal que $\tan\left(\frac{1}{2}\overline{\beta}\pi K(\alpha)\right) = \beta \tan \frac{1}{2}(\pi\alpha)$ e $K(\alpha) = \alpha - 1 + sinal(1-\alpha)$ (Samorodnitsky and Taqqu, 1994, p. 8). Segue assim que

$$G(0; \alpha, \beta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\alpha} \arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

e portanto,

$$P\{Z_\alpha(t) > 0\} = P\{Z_\alpha(1) > 0\} = \overline{G}(0; \alpha, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

(ii) Seja τ a primeira vez que o processo Z_α cruza o nível z, em outras palavras, $\tau = \inf\{t > 0 : Z_\alpha(t) \geq z\}$. Então τ é um tempo de parada e, portanto, temos $\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} = \{\tau \leq t\}$. Logo, podemos escrever

(4.15)

$$\begin{aligned} & P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z\right\} \\ = \quad & P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z, Z_\alpha(t)>z\right\}+P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z, Z_\alpha(t)\le z\right\}. \end{aligned}$$

Como $\{Z_\alpha(t) > z\} \subseteq \left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z\right\}$, o primeiro termo da soma no lado direito da Equação (4.15) se reduz a $P\{Z_\alpha(t) > z\}$. Defina $Z^*_\alpha(t) = Z_\alpha(\tau + t) - Z_\alpha(\tau)$.

Como $z \le Z_\alpha(\tau)$, temos que

$$\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z, Z_\alpha(t)\le z\right\}\subseteq\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z, Z^*_\alpha(t-\tau)\le 0\right\}$$

e assim, usando a Propriedade Forte de Markov, obtemos

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z, Z_\alpha(t)\le z\right\}\le P\{\tau\le t\}(1-\rho).$$

Então,

(4.16)

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z\right\}\le P\{Z_\alpha(t)>z\}+P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s)\ge z\right\}(1-\rho)$$

ou equivalentemente,

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s) \ge z\right\} \le \left(\frac{1}{\rho}\right) P\{Z_\alpha(t) > z\}.$$

■

Agora nós obtemos limitantes superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito no caso não-simétrico.

Teorema 4.2.4. *Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy com índice $\alpha \neq 1$ e $|\beta| \le 1$. Para números positivos u, c e λ, temos*

$$\begin{aligned} P\{T(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)) \le t\} &\le \left(\frac{1}{\rho}\right) P\{Z_\alpha(t) > u\lambda^{-1/\alpha}\} \\ &= \left(\frac{1}{\rho}\right) \overline{G}(u/(\lambda t)^{1/\alpha}; \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Demonstração. Como vimos no início da demonstração do Teorema 4.2.3,

$$P\{T(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)) > t\} \ge 1 - P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s) \ge u\lambda^{-1/\alpha}\right\}.$$

Portanto, pelo Lema 4.2.3(ii), temos que

$$P\{T(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)) > t\} \ge 1 - \left(\frac{1}{\rho}\right) P\{Z_\alpha(t) > u\lambda^{-1/\alpha}\}.$$

Daí,

$$P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\} \leq \left(\frac{1}{\rho}\right) P\{Z_\alpha(t) > u\lambda^{-1/\alpha}\}.$$

■

Teorema 4.2.5. *Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy com índice $\alpha \neq 1$ e $|\beta| \leq 1$ ou $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Para números positivos u, c e λ, temos*

$$P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\} \leq \frac{\overline{G}((u+ct)/(\lambda t)^{1/\alpha}; \alpha, \beta)}{\overline{G}(ct/(\lambda t)^{1/\alpha}; \alpha, \beta)}. \tag{4.17}$$

Demonstração. Da equação (4.16) temos que

$$P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq \frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}}\right\} \leq P\left\{Z_\alpha(t) > \frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}}\right\} + P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} Z_\alpha(s) \geq \frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}}\right\}(1-\rho). \tag{4.18}$$

Mas

$$\rho = P\{Z_\alpha(t) > 0\} \geq P\left\{Z_\alpha(t) > \frac{ct^{1/\alpha}}{\lambda}\right\}.$$

Segue que,

$$1 - \rho \leq 1 - P\left\{Z_\alpha(t) > \frac{ct^{1/\alpha}}{\lambda}\right\}.$$

Combinando as Equações (4.18) e (4.2), obtemos

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s) \ge \frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}}\right\} \\
\le\ & P\left\{Z_\alpha(t) > \frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}}\right\} + P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s) \ge \frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}}\right\}\left(1 - P\left\{Z_\alpha(t) > \frac{ct}{\lambda}^{1/\alpha}\right\}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s) \ge \frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}}\right\} \le \frac{P\left\{Z_\alpha(t) > \frac{u+ct}{\lambda^{1/\alpha}}\right\}}{P\left\{Z_\alpha(t) > \frac{ct}{\lambda}^{1/\alpha}\right\}}.
$$

Observe agora que

$$
\begin{aligned}
& P\{T(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)) > t\} \\
=\ & P\left\{\inf_{0\le s\le t}(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)) \ge 0\right\} \\
=\ & P\left\{\sup_{0\le s\le t}(-u-cs+\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)) \le 0\right\} \\
=\ & 1 - P\left\{\sup_{0\le s\le t}(-u-cs+\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)) > 0\right\} \\
=\ & 1 - P\left\{\sup_{0\le s\le t} Z_\alpha(s) > (u+ct)\lambda^{-1/\alpha}\right\}.
\end{aligned}
$$

Daí segue o teorema. ■

Conseguimos assim, os limitantes superiores para a Probabilidade de Ruína em tempo finito no caso simétrico.

Referências Bibliográficas

[1] Ash, R. B. e Doléans-Dade, C. A. (2000) *Probability and Measure Theory*, Second Edition. Hardcourt/Academic Press.

[2] Asmussen, S. (2000) *Ruin Probabilities*, Advanced Series On Statistical Science & Applied Probability, Volume 2. World Scientific.

[3] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons.

[4] Breiman, L. (1968) *Probability*, Addison-Wesley, Reading, MA.

[5] Chung, K. L. (1974), *A Course in Probability Theory*, Second Edition. Academic Press.

[6] Feller, W. (1966), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume II. John Wiley & Sons.

[7] Fristedt, B. (1974), Sample functions of processes with stationary, independent increments. In: P. Ney e S. Port, eds., *Advances in Probability and Related Topics*, Volume 3. Marcel Dekker, pp. 241-396.

[8] Furrer, H., Michna, Z. e Weron, A. (1997), *Stable Lévy motion approximation in collective risk theory.* Insurance: Mathematics and Economics 20 (1997) 97-114.

[9] Jacod, J. e Shiryaev, A. N. (1987), *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag.

[10] Janick, A. e Weron, A. (1994) *Simulation and Chaotic Behavior or Stable Processes.* Marcel Deckker.

[11] Karatzas, I. e Shreve, S. E. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition. Springer-Verlag.

[12] Lindvall, T. (1973), *Weak convergence of Probability Measures and Random Functions in the Function Space* $D[0,\infty)$. J. Appl. Probability 10, 109-121.

[13] Mijnheer, J. L.(1975) *Sample Path Properties of Stable Processes.* Mathematical Centre Tracts,Volume 59.

[14] Ross, S. M. (1996), *Stochastic Processes*, Second Edition. John Wiley & Sons.

[15] Samorodnitsky, G. e Taqqu, M.S. (1994), *Stable Non Gaussian Random Process: Stochastic models with infinite variance*. Chapman & Hall/CRC.

[16] Skorohod, A.V. (1957). Limit theorems for stochastic processes with independent increments. *Theory of Probability and its Applications* 2, 138-171.

[17] Stone, C. (1963). *Weak convergence of Stochastic Processes Defined on Semi-Infinit Time Intervals.* Proc. Amer. Math. Soc. 14, 694-696.

[18] Whitt, W. (1980). Some useful functions for functional limit theorems. *Mathematics of Operations Research* 5, 67-85.

[19] Willenkens, E. (1987). On the supremum of an infinitely divisible process. *Stochastic Processes and their Applications* 26, 173-175.

[20] Zolotarev, V. M. (1986).*One-dimensional Stable Distributions.* Translations of Mathematical Monographs, Volume 65. American Mathematical Society, Providence, RI.